Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 13

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Натуральное исчисление высказываний

Натуральное исчисление предикатов

Натуральный вывод формул

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2019, весенний семестр

Вступление

В предыдущей лекции подробно обсуждалось *исчисление высказываний Гильбертовского типа* $\mathfrak{H}_p$:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}_1 & A \to (B \to A) \\
\mathfrak{A}_2 & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
\mathfrak{A}_3 & A \,\&\, B \to A \\
\mathfrak{A}_4 & A \,\&\, B \to B \\
\mathfrak{A}_5 & A \to (B \to A \,\&\, B) \\
\mathfrak{A}_6 & A \to A \vee B \\
\mathfrak{A}_7 & B \to A \vee B \\
\mathfrak{A}_8 & (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C)) \\
\mathfrak{A}_9 & \neg A \to (A \to B) \\
\mathfrak{A}_{10} & (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) \\
\mathfrak{A}_{11} & A \vee \neg A
\end{array}
$$

$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

Оказалось, что в $\mathfrak{H}_p$ *выводимы* все *общезначимые* формулы и только они: $\vdash_{\mathfrak{H}_p} \varphi \Leftrightarrow \models \varphi$

Продолжим обсуждение логических исчислений попыткой адаптировать $\mathfrak{H}_p$ к *намного более выразительному* языку логики предикатов

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Зададим исчисление предикатов $\mathfrak{H}_{fo}$ следующим образом

Формулами исчисления $\mathfrak{H}_{fo}$ объявим *формулы логики предикатов*

Расширим понятие *схемы формулы* так:

1. Помимо “обычных” параметров разрешим использовать предметные параметры и термальные параметры в тех местах формулы, где могут располагаться соответственно предметные переменные и термы
2. Для схемы формулы может разрешим задавать ограничение: формула φ порождается схемой $\Phi\,[\![\widetilde{p}^k]\!]$ с ограничением $C \Leftrightarrow$ существуют объекты $o_1, \ldots, o_k$ (формулы, переменные, термы), удовлетворяющие ограничению C и такие что φ совпадает с $\Phi\,[\![p_1/o_1, \ldots, p_k/o_k]\!]$

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Аксиомами $\mathfrak{H}_{fo}$ объявим все формулы, порождаемые следующими схемами над параметрами A, B, C, предметным параметром $\mathtt{x}$ и термальным параметром t:

$\mathfrak{A}_1$ $A \to (B \to A)$

$\mathfrak{A}_2$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$\mathfrak{A}_3$ $A \,\&\, B \to A$

$\mathfrak{A}_4$ $A \,\&\, B \to B$

$\mathfrak{A}_5$ $A \to (B \to A \,\&\, B)$

$\mathfrak{A}_6$ $A \to A \vee B$

$\mathfrak{A}_7$ $B \to A \vee B$

$\mathfrak{A}_8$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

$\mathfrak{A}_9$ $\neg A \to (A \to B)$

$\mathfrak{A}_{10}$ $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

$\mathfrak{A}_{11}$ $A \vee \neg A$

$\mathfrak{A}_{12}$ $\forall \mathtt{x}\ A \to A\{\mathtt{x}/t\}$

$\mathfrak{A}_{13}$ $A\{\mathtt{x}/t\} \to \exists \mathtt{x}\ A$

Ограничение для схем $\mathfrak{A}_{12}$, $\mathfrak{A}_{13}$:
переменная x свободна в терме t для формулы A

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Включим в $\mathfrak{H}_{fo}$ два правила вывода:

1. *Правило отделения* (*modus ponens*):
$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$
2. Правило обобщения с параметром A и предметным параметром x:
$$\frac{A}{\forall \mathrm{x}\ A}$$

$g(\mathrm{x}, \varphi)$ — формула $\forall \mathrm{x}\ \varphi$, получающаяся из формулы φ применением правила обобщения

Пример применения правила обобщения:
из формулы $\exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ по правилу обобщения выводятся формулы
$$\forall \mathrm{y}\ \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \text{ и } \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Пример вывода формулы $\forall \mathrm{y}\ (\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$ в $\mathfrak{H}_{fo}$:

$$
\begin{array}{rll}
\mathfrak{A}_{13}: & \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & (\chi_1) \\
\mathfrak{A}_{1}: & \chi_1 \to (\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \chi_1) & (\chi_2) \\
mp(\chi_1,\chi_2): & \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to (\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})) & (\chi_3) \\
\mathfrak{A}_{12}: & \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & (\chi_4) \\
\mathfrak{A}_{2}: & (\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to (\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \to & \\
 & \quad ((\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to & \\
 & \qquad (\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})) & \\
 & \quad) & (\chi_5) \\
mp(\chi_3,\chi_5): & (\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to & \\
 & \quad (\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})) & (\chi_6) \\
mp(\chi_4,\chi_6): & \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & (\chi_7) \\
g(\mathrm{y},\chi_7): & \forall \mathrm{y}\ (\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})) &
\end{array}
$$

Теорема Гёделя о полноте

Для любой формулы логики предикатов φ справедлива равносильность

$$\vdash_{\mathfrak{H}_{fo}} \varphi \Leftrightarrow \models \varphi$$

Доказательство. **Не приводится:** некоторые свойства выводимости переносятся из логики высказываний, а остальное попробуйте сами

Следствие(***корректность и полнота исчисления предикатов для аксиоматических теорий***)
Для любой аксиоматической теории первого порядка $\mathcal{T}$ и любой формулы логики предикатов φ справедлива равносильность

$$\mathcal{T} \vdash_{\mathfrak{H}_{fo}} \varphi \Leftrightarrow \models_{\mathcal{T}} \varphi$$

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Доказательство (следствия).

$\models_{\mathcal{T}} \varphi \quad \Rightarrow \quad$ (*определение общезначимости в теории*)

$\mathcal{T} \models \varphi \quad \Rightarrow \quad$ (*теорема компактности Мальцева*)

существует конечное подмножество $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ множества $\mathcal{T}$, такое что $\Gamma \models \varphi \quad \Rightarrow \quad$ (*теорема о логическом следствии*)

$\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi \quad \Rightarrow \quad$ (*теорема о равносильной замене*)

$\models \psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots (\psi_n \to \varphi) \ldots) \quad \Rightarrow \quad$ (*теорема Гёделя о полноте*)

$\vdash_{\mathfrak{H}_{fo}} \psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots (\psi_n \to \varphi) \ldots)$
$\Rightarrow \quad$ (*лемма о дедукции*, *справедливая и для* $\mathfrak{H}_{fo}$)

$\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash_{\mathfrak{H}_{fo}} \varphi \quad \Rightarrow \quad$ (*лемма о монотонности выводимости*)

$\mathcal{T} \vdash_{\mathfrak{H}_{fo}} \varphi$

Доказательство в обратную сторону аналогично ▼

Исчисление предикатов гильбертовского типа

Основные недостатки исчислений предикатов гильбертовского типа, в том числе исчисления $\mathfrak{H}_{fo}$:

- устройство доказательств исчисления заметно отличается от устройства доказательств, используемых в математике в естественном понимании
- доказательства даже простых общезначимых формул бывает трудно понять, а тем более придумать

Эти недостатки можно “смягчить”, если

- включить в исчисление как можно меньше аксиом, и устроить аксиомы так, чтобы они были *самоочевидны*
- включить в качестве правил вывода все основные способы рассуждений, встречающиеся в доказательствах

Исчисления, обладающие такими свойствами, обычно называют **натуральными исчислениями**

Натуральное исчисление высказываний

Формулами исчисления $\mathfrak{N}_p$ объявим секвенции: записи вида
$$\Gamma \vdash \varphi,$$
где Γ — множество формул логики высказываний и φ — формула логики высказываний

Содержательное прочтение такой секвенции:

формула φ доказанно следует (выводится) из множества Γ

При этом знак "$\vdash$" используется как составная часть формулы исчисления: в $\mathfrak{N}_p$ *доказываются* утверждения вида

"доказано, что φ следует из Γ"

Натуральное исчисление высказываний

Чтобы не путать формулы логики высказываний с формулами исчисления, “формулами” будем называть **только** формулы логики высказываний

Аксиомами исчисления $\mathfrak{N}_p$ объявим все секвенции, порождаемые единственной схемой над параметром A, *на место которого подставляются формулы*:

$$\mathfrak{A}: \quad A \vdash A$$

Содержательное прочтение этой схемы:
не требует доказательства то, что любая формула следует из себя

Правила вывода натурального исчисления высказываний

В описываемых далее правилах вывода используются *параметры*

- A, B: на их места подставляются формулы
- Γ, Δ: на их места подставляются **множества формул**

Правило введения конъюнкции:

$$R_{\&}^{+} : \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}$$

Правила удаления конъюнкции:

$$R_{\&}^{-1} : \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash A}, \qquad R_{\&}^{-2} : \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash B}$$

Правила введения дизъюнкции:

$$R_{\vee}^{+1} : \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \qquad R_{\vee}^{+2} : \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Правило удаления дизъюнкции (правило разбора случаев):

$$R_{\vee}^{-} : \frac{\Gamma \vdash A \vee B,\ \Gamma, A \vdash C,\ \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Правила вывода натурального исчисления высказываний

Правило введения импликации (правило дедукции):

$$R^{+}_{\to} : \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Правило удаления импликации (*правило отделения*):

$$R^{-}_{\to} : \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

Правило введения отрицания (правило приведения к абсурду):

$$R^{+}_{\neg} : \frac{\Gamma, A \vdash B,\ \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Правило удаления отрицания (закон снятия двойного отрицания):

$$R^{-}_{\neg} : \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Правило монотонности:

$$R_m : \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi}$$

Натуральное исчисление высказываний

Лемма(*о почти тривиальном выводе*). Для любого множества формул Γ и любой формулы φ секвенция $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$

Доказательство.

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{A}: & \varphi \vdash \varphi \qquad (s_1) \\ R_m(s_1): & \Gamma, \varphi \vdash \varphi \quad \blacktriangledown \end{array}$$

Вывод, предложенный в доказательстве утверждения, в составе других выводов для удобства будет записываться так:

$$\mathfrak{A}': \quad \Gamma, \varphi \vdash \varphi \quad (\Gamma, \varphi \vdash \varphi)$$

Натуральное исчисление высказываний

Лемма(*закон исключённого третьего*)
Для любой формулы φ секвенция $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$

Доказательство.

$$
\begin{array}{rll}
\mathfrak{A}' : & \neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \varphi & (s_1) \\
R_{\vee}^{+2}(s_1) : & \neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \varphi \vee \neg\varphi & (s_2) \\
\mathfrak{A}' : & \neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi) & (s_3) \\
R_{\neg}^{+}(s_2, s_3) : & \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \neg\varphi & (s_4) \\
\mathfrak{A}' : & \neg(\varphi \vee \neg\varphi), \neg\varphi \vdash \neg\varphi & (s_5) \\
\ldots & & \\
R_{\neg}^{+}(s_6, s_7) : & \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \neg\neg\varphi & (s_8) \\
R_{\neg}^{+}(s_4, s_8) : & \vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi) & (s_9) \\
R_{\neg}^{-}(s_9) : & \vdash \varphi \vee \neg\varphi & \blacktriangledown
\end{array}
$$

Закон исключённого третьего настолько полезен, что часто включается в натуральные исчисления в виде схемы аксиом

$$\mathfrak{A}_{\vee}: \quad \vdash A \vee \neg A$$

Натуральное исчисление высказываний

Теорема(*о корректности натурального исчисления высказываний*). Для любой формулы φ справедливо следующее: если секвенция $\vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$, то формула φ общезначима

Доказательство.

По *теореме о корректности исчисления* $\mathfrak{H}_p$, достаточно обосновать справедливость соотношения $\vdash_{\mathfrak{H}_p} \varphi$

Для этого достаточно показать, что для любой секвенции $\Gamma \vdash \varphi$ справедливо соотношение $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}_p} \varphi$

1. Для любой аксиомы $\psi \vdash \psi$ справедливо $\psi \vdash_{\mathfrak{H}_p} \psi$ — по *лемме о тривиальном выводе в* $\mathfrak{H}_p$

Натуральное исчисление высказываний

Теорема(*о корректности натурального исчисления высказываний*). Для любой формулы φ справедливо следующее: если секвенция $\vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$, то формула φ общезначима

Доказательство.

2. Для любого правила вывода R исчисления $\mathfrak{N}_p$ справедливо следующее: если для любой секвенции $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ в верхней части правила верно $\Gamma_i \vdash_{\mathfrak{H}_p} \varphi_i$, то для секвенции $\Gamma \vdash \varphi$ в нижней части правила верно $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}_p} \varphi$

Подробно разберём этот пункт для двух правил: R_m и $R_{\&}^{+}$
(в остальных случаях рассуждения аналогичны)

2m. По *лемме о монотонности выводимости в* $\mathfrak{H}_p$, если $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}_p} \psi$, то $\Gamma \cup \Delta \vdash_{\mathfrak{H}_p} \psi$ для любого множества формул Δ

Натуральное исчисление высказываний

Теорема(*о корректности натурального исчисления высказываний*). **Для любой формулы φ справедливо следующее: если секвенция $\vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$, то формула φ общезначима**

Доказательство.

2&. Пусть справедливы соотношения $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}_p} \psi$ и $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}_p} \chi$

По *лемме о выводимости связок в* $\mathfrak{H}_p$, $\psi, \chi \vdash_{\mathfrak{H}_p} \psi \,\&\, \chi$

По *лемме о сечении в* $\mathfrak{H}_p$, $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}_p} \psi \,\&\, \chi$

Завершение доказательства. Рассмотрим произвольный вывод в $\mathfrak{N}_p$: $S_1, \ldots, S_k$

Индукцией по номеру i секвенции S_i (вида $\Gamma_i \vdash \psi_i$) и применением рассуждений пункта *1* к аксиомам, и пункта *2* — к секвенциям, получающимся согласно правилам вывода, обосновывается справедливость всех соотношений $\Gamma_i \vdash_{\mathfrak{H}_p} \psi_i$ ▼

Натуральное исчисление высказываний

Теорема(*о полноте натурального исчисления высказываний*). Для любой формулы φ справедливо следующее: если формула φ общезначима, то секвенция $\vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$

Доказательство.

По *теореме о полноте исчисления* $\mathfrak{H}_p$, достаточно обосновать следующую импликацию:
если $\vdash_{\mathfrak{H}_p} \varphi$, то секвенция $\vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$

Для этого достаточно показать, что для любого множества формул Γ и любой формулы φ, таких что $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}_p} \varphi$, секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$

Натуральное исчисление высказываний

Теорема(*о полноте натурального исчисления высказываний*). **Для любой формулы φ справедливо следующее: если формула φ общезначима, то секвенция $\vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$**

Доказательство.

1. Для любой аксиомы φ исчисления $\mathfrak{H}_p$ секвенция $\vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$

Выводимость секвенций для аксиом, порождаемых схемой $A \vee \neg A$, следует из *леммы о законе исключённого третьего для* $\mathfrak{N}_p$

Выводимость секвенций для аксиом, порождаемых остальными схемами, обосновывается аналогично и не сложнее

В целях экономии времени докажем выводимость только секвенций $\vdash (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$, соответствующих аксиомам схемы $\mathfrak{A}_8$ исчисления $\mathfrak{H}_p$

Натуральное исчисление высказываний

Теорема(*о полноте натурального исчисления высказываний*). **Для любой формулы φ справедливо следующее: если формула φ общезначима, то секвенция $\vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$**

Доказательство.

1. $\vdash (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$

$$
\begin{array}{rll}
\mathfrak{A}': & \varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi, \varphi \vdash \varphi & (s_1) \\
\mathfrak{A}': & \varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi, \varphi \vdash \varphi \to \chi & (s_2) \\
R^{-}_{\to}(s_1, s_2): & \varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi, \varphi \vdash \chi & (s_3) \\
\dots & & \\
R^{-}_{\to}(s_4, s_5): & \varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi, \psi \vdash \chi & (s_6) \\
\mathfrak{A}': & \varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi & (s_7) \\
R^{-}_{\vee}(s_3, s_6, s_7): & \varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi \vdash \chi & (s_8) \\
R^{+}_{\to}(s_8): & \varphi \to \chi, \psi \to \chi \vdash \varphi \vee \psi \to \chi & (s_9) \\
R^{+}_{\to}(s_9): & \varphi \to \chi \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi) & (s_{10}) \\
R^{+}_{\to}(s_{10}): & \vdash (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi)) &
\end{array}
$$

Натуральное исчисление высказываний

Теорема(*о полноте натурального исчисления высказываний*). **Для любой формулы φ справедливо следующее: если формула φ общезначима, то секвенция $\vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_p$**

Доказательство.

2. Если $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}_p} \varphi$, $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}_p} \varphi \to \psi$ и секвенции $\Gamma \vdash \varphi$, $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ выводимы в $\mathfrak{N}_p$, то секвенция $\Gamma \vdash \psi$, соответствующая применению *правила отделения в* $\mathfrak{H}_p$, выводима в $\mathfrak{N}_p$ по *правилу отделения в* $\mathfrak{N}_p$

Завершение доказательства. Рассмотрим произвольный вывод из множества формул Γ в $\mathfrak{H}_p$: $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$

Индукцией по номеру i формулы φ_i и применением рассуждений пункта *1* к аксиомам, и пункта *2* — к формулам, получающимся согласно правилу отделения, обосновывается выводимость всех секвенций $\Gamma \vdash \varphi_i$ в $\mathfrak{N}_p$ ▼

Натуральное исчисление предикатов

Преобразуем исчисление высказываний $\mathfrak{N}_p$ в исчисление предикатов $\mathfrak{N}_{fo}$ аналогично тому, как исчисление $\mathfrak{H}_p$ было преобразовано в $\mathfrak{H}_{fo}$

Для этого

- везде, где в $\mathfrak{N}_p$ записывались формулы логики высказываний, будем записывать формулы логики предикатов
- схемы аксиом и правила вывода оставим без изменений (*но теперь ими будут порождаться секвенции, содержащие формулы логики предикатов*
- добавим в исчисление **правила введения и удаления кванторов**

В новых правилах вывода, описанных далее, $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$ — *предметные параметры*, и t — *термальный параметр*

Правила работы с кванторами

Правило введения всеобщности (закон обобщения):

$$R_{\forall}^{+} : \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\, A}$$

Ограничение: x не является свободной переменной формул из Γ

Правило удаления всеобщности (закон перехода к частному):

$$R_{\forall}^{-} : \frac{\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\, A}{\Gamma \vdash A\{\mathrm{x}/t\}}$$

Ограничение: переменная x свободна для терма t в формуле A

Правило введения существования:

$$R_{\exists}^{+} : \frac{\Gamma \vdash A\{\mathrm{x}/t\}}{\Gamma \vdash \exists \mathrm{x}\, A}$$

Ограничение: переменная x свободна для терма t в формуле A

Правило удаления существования:

$$R_{\exists}^{-} : \frac{\Gamma \vdash \exists \mathrm{x}\, A,\ \Gamma, A\{\mathrm{x}/y\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Ограничение: y не содержится в формулах из $\Gamma \cup \{A, B\}$

Натуральное исчисление предикатов

Пример: вывод секвенции $\vdash \forall \mathrm{y}\ (\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$ в $\mathfrak{N}_{fo}$ может быть устроен так:

$$\begin{array}{rll}
\mathfrak{A}: & \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \vdash \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & (s_1)\\
R^-_\forall(s_1): & \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \vdash \mathrm{P}(\mathrm{u},\mathrm{y}) & (s_2)\\
R^+_\exists(s_2): & \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \vdash \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & (s_3)\\
R^+_\to(s_3): & \vdash \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & (s_4)\\
R^+_\forall(s_4): & \vdash \forall \mathrm{y}\ (\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})) &
\end{array}$$

Натуральное исчисление предикатов

Теорема(*о корректности и полноте натурального исчисления предикатов*). **Для любой формулы φ секвенция $\vdash \varphi$ выводима в исчислении $\mathfrak{N}_{fo}$ тогда и только тогда, когда формула φ общезначима**

Доказательство. Аналогично доказательству теорем о корректности и полноте исчисления $\mathfrak{N}_p$ с заменой теорем о корректности и полноте исчисления $\mathfrak{H}_p$ на теорему Гёделя о полноте

Следствие(*корректность и полнота натурального исчисления предикатов для аксиоматических теорий*). **Для любой аксиоматической теории первого порядка $\mathcal{T}$ и любой формулы логики предикатов φ секвенция $\mathcal{T} \vdash \varphi$ выводима в $\mathfrak{N}_{fo}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T} \models \varphi$**

Доказательство. Повторяет доказательство аналогичной теоремы для исчисления $\mathfrak{N}_p$

Натуральный вывод формул

Устройство выводов в исчислениях $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_{fo}$ *более похоже* на устройство доказательств *в обычном понимании* по сравнению с исчислениями $\mathfrak{H}_p$ и $\mathfrak{H}_{fo}$, но всё-таки *заметно непохоже*: в *обычных* доказательствах

- перед каждым высказыванием **не выписываются** все посылки, из которых оно следует
- некоторые части доказательства сгруппированы в виде **поддоказательств**:
  - "предположим, что утверждение P верно; тогда <вывод>, а значит, P неверно" (*рассуждение от противного*)
  - "рассмотрим следующий случай: верно P; тогда <вывод>, и верно Q; <подвыводы>; рассмотрены всевозможные случаи, а значит, верно Q" (*разбор случаев*)
- в начале поддоказательств выписываются **посылки**, считающиеся верными в поддоказательстве (P), и обычно этих посылок конечное число

Натуральный вывод формул

Определим другую форму записи выводов в исчислении $\mathfrak{N}_{fo}$, *более похожую* на форму записи *обычных* доказательств

Начнём с того, что ограничим возможности построения вывода согласно следующим замечаниям

Замечание 1. В выводе секвенции $\vdash \varphi$ достаточно использовать только **конечные** множества формул слева от $\vdash$: включать в множество только те формулы, которые используются в правилах вывода

Замечание 2. Согласно *теореме компактности Мальцева* и *теоремам о корректности и полноте исчисления* $\mathfrak{N}_{fo}$ *для теорий*, секвенция $\mathcal{T} \vdash \varphi$, где $\mathcal{T}$ — аксиоматическая теория, доказуема в том и только том случае, если доказуема **хотя бы одна** секвенция $\Gamma \vdash \varphi$, где Γ — **конечное** подмножество множества $\mathcal{T}$

Натуральный вывод формул

Замечание 3. При применении правила монотонности достаточно добавлять только те формулы, которые “удалятся” при применении какого-либо из правил (*или входят в аксиоматическую теорию*)

Замечание 4. Вывод можно перестроить так, чтобы добавления формул в левые части секвенций (*открывающие скобки разных типов*) и удаления формул из этих частей (*закрывающие скобки, парные добавлениям*) были сбалансированы по скобкам

Натуральный вывод формул

Следуя этим замечаниям, можно переписать вывод в следующем виде σ (в виде натурального вывода формулы):

$$\sigma \ ::= \ \sigma,\ldots,\sigma \ \mid \ \varphi \ \mid \ ([\varphi],\ \sigma,\ldots,\sigma),$$

где φ — формула и справедливо следующее:

- каждая формула вне квадратных скобок — это формула, располагающаяся в правой части соответствующей секвенции, и секвенции имеют тот же порядок, что и соответствующие формулы
- формула в квадратных скобках входит в левые части всех секвенций внутри скобок
- формулы вне квадратных скобок устроены так, чтобы последовательность соответствующих секвенций была выводом

Примеры натуральных выводов формул

Натуральный вывод закона исключённого третьего $\varphi \vee \neg\varphi$ и соответствующей секвенции $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ (каждая пара скобок в выводе формулы изображена вертикальной чертой слева):

	$[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]$	
	$[\varphi]$	
$1/\mathfrak{A}'$:	φ	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \varphi$
$2/R_{\vee}^{+2}(1)$:	$\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \varphi \vee \neg\varphi$
$3/\mathfrak{A}'$:	$\neg(\varphi \vee \neg\psi)$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
$4/R_{\neg}^{+}(2,3)$:	$\neg\varphi$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \neg\varphi$
	$[\neg\varphi]$	
$5/\mathfrak{A}'$:	$\neg\varphi$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \neg\varphi \vdash \neg\varphi$
$6/R_{\vee}^{+1}(5)$:	$\varphi \vee \neg\varphi$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \neg\varphi \vdash \varphi \vee \neg\varphi$
$7/\mathfrak{A}'$:	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \neg\varphi \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
$8/R_{\neg}^{+}(6,7)$:	$\neg\neg\varphi$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \neg\neg\varphi$
$9/R_{\neg}^{+}(4,8)$:	$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	$\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
$10/R_{\neg}^{-}(9)$:	$\varphi \vee \neg\varphi$	$\vdash \varphi \vee \neg\varphi$

Примеры натуральных выводов формул

Натуральный вывод формулы $\forall y\ (\forall x\ P(x,y) \to \exists x\ P(x,y))$ и соответствующей секвенции $\vdash \forall y\ (\forall x\ P(x,y) \to \exists x\ P(x,y))$:

	$[\forall x\ P(x,y)]$	
$1/\mathfrak{A}'$:	$\forall x\ P(x,y)$	$\forall x\ P(x,y) \vdash \forall x\ P(x,y)$
$2/R_{\forall}^{-}(1)$:	$P(u,y)$	$\forall x\ P(x,y) \vdash P(u,y)$
$3/R_{\exists}^{+}(2)$:	$\exists x\ P(x,y)$	$\forall x\ P(x,y) \vdash \exists x\ P(x,y)$
$4/R_{\to}^{+}(3)$:	$\forall x\ P(x,y) \to \exists x\ P(x,y)$	$\vdash \forall x\ P(x,y) \to \exists x\ P(x,y)$
$5/R_{\forall}^{+}(4)$:	$\forall y\ (\forall x\ P(x,y) \to \exists x\ P(x,y))$	$\vdash \forall y\ (\forall x\ P(x,y) \to \exists x\ P(x,y))$