Лекция 5. Графы. Раскраски вершин графов. Хроматическое число графа. Двуцветные графы. Верхние оценки хроматического числа графа.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

Лекции по «Дискретным моделям».
Магистратура, 1-й курс,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Раскраска вершин графа

Раскраска графа $G = (V, E)$ в k цветов — отображение

$$\rho : V \to \{1, 2, \ldots, k\},$$

в котором из $(v, w) \in E$ следует $\rho(v) \neq \rho(w)$.

Т.е. любые смежные вершины обязаны быть окрашены в разные цвета.

Хроматическое число $\chi(G)$ графа G — наименьшее возможное число цветов, в которое можно окрасить его вершины.

Для каждого графа $G = (V, E)$ верно соотношение $\chi(G) \leq |V|$.

Двуцветные графы

Граф G — **двуцветный**, если $\chi(G) = 2$.

Теорема 1. *Граф* $G = (V, E)$ *— двуцветный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.*
Доказательство.
1. Если в графе G есть цикл нечетной длины, то вершины этого цикла в два цвета не раскрасить.

Двуцветные графы

Доказательство.
2. Пусть теперь в графе G нет циклов нечетной длины.
Можно считать, что G — связный граф, иначе можно провести рассуждения для каждой его компоненты связности.
Построим в графе G его остовное дерево D.
Выберем произвольную вершину $v_0 \in V$.
В дереве D для каждой вершины $w \in V$ найдется ровно одна простая (v_0, w)-цепь P_w.
Рассмотрим отображение $\rho : V \to \{1, 2\}$:
$\rho(w) = 1$, если длина цепи P_w нечетна;
$\rho(w) = 2$, если длина цепи P_w четна.
Покажем, что ρ является раскраской вершин, т.е. в графе G нет ребер, оба конца которых окрашены в один и тот же цвет.

Двуцветные графы

Доказательство.
Предположим противное: пусть $(u, w) \in E$ и $\rho(u) = \rho(w)$.
Рассмотрим в графе G замкнутый путь $P = uP_u v_0 P_w w(w, u)u$.
Длина пути P нечетна, т.к. у длин цепей P_u, P_w в дереве D одинаковая четность.
Значит, из указанного замкнутого пути P можно выделить цикл нечетной длины. Противоречие.

$\square$

Двудольные графы

Замечание 1. Отметим, что граф — двуцветный тогда и только тогда, когда он — двудольный.

Верхняя оценка хроматического числа

Предложение 1. *Для каждого графа* $G = (V, E)$ *верно неравенство* $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Доказательство. Пусть $v_1 \in V$ — произвольная вершина графа G, и D — его остовное дерево с корнем в вершине v_1.
Обойдем дерево D в глубину, начиная с корня v_1. При этом обходе припишем вершине v_1 номер 1, а затем каждой встречающейся новой вершине будем приписывать следующий номер.
После такого обхода окажется, что каждая вершина v графа G, кроме вершины v_1, смежна с некоторой вершиной с меньшим номером.
Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_p$ — занумерованные вершины множества V, где $p = |V|$.

Верхняя оценка хроматического числа

Доказательство. Укажем раскраску ρ вершин графа G в $\Delta(G)+1$ цветов из множества $C=\{1,2,\ldots,\Delta(G)+1\}$.

Вершины $v_p, v_{p-1},\ldots, v_1$ окрасим индукцией по убыванию их номеров.

Если вершина v_i не совпадает с вершиной v_1, то она смежна хотя бы с одной вершиной с меньшим номером. Значит, она смежна с не более $\Delta(G)-1$ окрашенных вершин. Припишем ей цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин.

Вершина v_1 смежна с не более $\Delta(G)$ окрашенных вершин. Припишем вершине v_1 цвет, не встречающийся среди смежных с ней вершин, если он найдется, или новый цвет.
Получим раскраску графа G в $\Delta(G)+1$ цветов.

$\square$

Достижимость оценки $\Delta(G)+1$

Если $G = K_n$, то $\Delta(G) = n - 1$ и $\chi(G) = n$.

Если $G = C_{2m+1}$ — цикл нечетной длины, то $\Delta(G) = 2$ и $\chi(G) = 3$.

Верхняя оценка хроматического числа

Предложение 2. *Если в графе* $G = (V, E)$ *с* $\Delta(G) \geq 3$ *найдется вершина* $v \in V$, *для которой* $d_G(v) < \Delta(G)$, *то* $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

В самом деле, достаточно в доказательстве предложения 1 построить остовное дерево D графа G с корнем в такой вершине v_1, что $d_G(v_1) < \Delta(G)$.

Двусвязнные графы

Граф $G = (V, E)$ называется **двусвязным**, если при удалениии из него любой вершины остается связный граф.

Двусвязный граф называется также **неразделимым** графом, или **блоком**.

Компоненты двусвязности

Максимальный (по включению) двусвязный подграф связного графа $G = (V, E)$ называется его **компонентой двусвязности**, или **блоком**.

Каждая компонента двусвязности связного графа либо содержит не менее трех вершин, либо совпадает с графом K_2, либо совпадает с графом K_1 (если исходный граф совпадает с K_1).

Если граф G — двусвязный, то он является своей единственной компонентой двусвязности.

Предложение 3. *Вершины графа G можно раскрасить в k цветов тогда и только тогда, когда в k цветов можно раскрасить каждую компоненту двусвязности графа G.*

Лемма о трех вершинах

Лемма 1 (о трех вершинах). *Если $G = (V, E)$ — двусвязный граф с $\Delta(G) \geq 3$, не являющийся полным графом, то найдутся такие три вершины $u, v, w \in V$, что $(u, w) \notin E$, $(u, v) \in E$, $(w, v) \in E$ и граф $G - \{u, w\}$ — связный.*

Теорема Брукса

Теорема 2 (Брукса). *Если G — связный граф с $\Delta(G) \geq 3$, не являющийся полным графом, то $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*
Доказательство. Можно считать, что $G = (V, E)$ — двусвязный граф, т.к. иначе рассуждения можно провести для каждой его компоненты двусвязности.

По лемме о трех вершинах найдем в двусвязном графе G такие вершины $u, v_1, w \in V$, что $(u, w) \notin E$, $(u, v_1) \in E$, $(w, v_1) \in E$ и граф $G_1 = G - \{u, w\}$ является связным.

Теорема Брукса

Доказательство. Пусть D_1 — остовное дерево графа G_1 с корнем в вершине v_1.
Обойдем дерево D_1 в глубину, начиная с корня v_1. При этом обходе припишем вершине v_1 номер 1, а затем каждой встречающейся новой вершине будем приписывать следующий номер.
После такого обхода окажется, что каждая вершина v графа G, кроме вершины v_1, смежна с некоторой вершиной с меньшим номером.
Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{p-2}$ — занумерованные вершины множества $V_1 = V \setminus \{u, w\}$, где $p = |V|$.

Теорема Брукса

Доказательство. Укажем раскраску ρ вершин графа G в $\Delta(G)$ цветов из множества $C = \{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$.

Сначала положим $\rho(u) = \rho(w) = 1$.

Вершины $v_{p-2}, v_{p-3}, \ldots, v_1$ окрасим индукцией по убыванию их номеров.

Если вершина v_i не совпадает с вершиной v_1, то она смежна хотя бы с одной вершиной с меньшим номером. Значит, она смежна с не более $\Delta(G) - 1$ окрашенных вершин. Припишем ей цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин.

Вершина v_1 также смежна с вершинами с не более $\Delta(G) - 1$ цветами, т.к. смежные с ней вершины u, w окрашены в один цвет. Припишем вершине v_1 цвет, не встречающийся среди смежных с ней окрашенных вершин.

$\square$

Задачи

1. Найти хроматическое число графа $G=(V,E)$, если:

1) $G=K_4-e$, где e — произвольное ребро графа K_4;
2) $G=K_4-\{e_1,e_2\}$, где e_1,e_2 — произвольные различные ребра графа K_4 (рассмотреть все возможные случаи);
3) $G=K_5-e$, где e — произвольное ребро графа K_5;
4) $G=K_5-\{e_1,e_2\}$, где e_1,e_2 — произвольные различные ребра графа K_5 (рассмотреть все возможные случаи).

2. Какое наименьшее число ребер надо удалить из графа $G=(V,E)$, чтобы оставшийся граф можно было раскрасить в k цветов, если:

1) $G=K_4$, $k=2$;
2) $G=K_5$, $k=3$;
3) $G=K_6$, $k=4$;
4) G состоит из 7 вершин, занумерованных числами от 0 до 6, и ребер вида $(i,i+1 \pmod 7)$, $(i,i+2 \pmod 7)$, $i=0,1,\ldots,6$, $k=3$.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 235–243.

2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 152–153.

3. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008. С. 359–361

Конец лекции