

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 28

Натуральное исчисление высказываний:
основные определения

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, весенний семестр

Вступление

Логические исчисления, в числе прочего, применяются для формализации и анализа доказательств, записанных на естественном языке, и для этого, как правило,

- ▶ выбираются как можно более простые «самоочевидные» аксиомы, и чем меньше аксиом, тем лучше
- ▶ в правилах вывода записываются основные способы построения «естественных» математических доказательств
- ▶ исчисление в целом устраивается так, чтобы доказуемость и доказательство формулы соответствовали доказуемости и доказательству утверждения, выраженного этой формулой, в «обычном» понимании

Исчисления такого вида принято называть

натуральными исчислениями

Для начала обсудим **натуральное исчисление высказываний (НИВ)**, предназначенное для доказательства **общезначимости** формул **логики высказываний**

НИВ: формулы исчисления (секвенции)

Вспомним пример, с которого начинался блок 27:

Теорема. Если все муряки блюкают, а я не блюкаю, то я не муряка.

Чтобы избежать ненужных технических выкладок и вписать этот пример в рамки логики высказываний, немного его упростим:

Теорема.

Если я, будучи мурякой, непременно бы блюкал, и я муряка, то я блюкаю.

Пусть $x = \text{«я муряка»}$ и $y = \text{«я блюкаю»}$

Тогда последняя теорема переписывается так:

Теорема. $(x \rightarrow y) \& x \rightarrow y$

НИВ: формулы исчисления (секвенции)

Теорема. $(x \rightarrow y) \& x \rightarrow y$

Доказательство.

Пусть верно утверждение « $(x \rightarrow y) \& x$ ».

Тогда верно и « $x \rightarrow y$ », и « x ».

Так как верно « $x \rightarrow y$ » и « x », то верно и « y ».

Это следствие получено в контексте посылки « $(x \rightarrow y) \& x$ »,
а значит, верно « $(x \rightarrow y) \& x \rightarrow y$ ».

Перепишем это доказательство так, чтобы было видно, про какие формулы и в каких предположениях утверждается, что они верны:

Строка	Предположения	Что верно
2	$(x \rightarrow y) \& x$	$(x \rightarrow y) \& x$
3	$(x \rightarrow y) \& x$	$x \rightarrow y$
3	$(x \rightarrow y) \& x$	x
4	$(x \rightarrow y) \& x$	y
6		$(x \rightarrow y) \& x \rightarrow y$

НИВ: формулы исчисления (секвенции)

Множество формул Γ , предполагающихся верными, и формула φ , утверждающаяся верной в этих предположениях, в НИВ записываются в виде **секвенции**

$$\Gamma \vdash \varphi$$

В секвенции $\{\psi_1, \dots, \psi_k\} \vdash \varphi$ иногда будем опускать фигурные скобки:

$$\psi_1, \dots, \psi_k \vdash \varphi$$

Предположения	Что верно	Соответствующая секвенция
$(x \rightarrow y) \& x$	$(x \rightarrow y) \& x$	$(x \rightarrow y) \& x \vdash (x \rightarrow y) \& x$
$(x \rightarrow y) \& x$	$x \rightarrow y$	$(x \rightarrow y) \& x \vdash x \rightarrow y$
$(x \rightarrow y) \& x$	x	$(x \rightarrow y) \& x \vdash x$
$(x \rightarrow y) \& x$	y	$(x \rightarrow y) \& x \vdash y$
$(x \rightarrow y) \& x \rightarrow y$		$\vdash (x \rightarrow y) \& x \rightarrow y$

Формулами НИВ обявим всевозможные секвенции

Чтобы не путать формулы ЛВ и формулы НИВ, будем для формул НИВ **всегда** использовать термин «секвенция»

Будем говорить, что формула φ **доказуема в натуральном исчислении**, если доказуема секвенция $\vdash \varphi$

НИВ: аксиомы

Семейство всех аксиом НИВ зададим одной схемой аксиом \mathfrak{A} :

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$$

В этой схеме используются два параметра:

- ▶ A — произвольная формула
- ▶ Γ — произвольное множество формул

Содержательное прочтение схемы \mathfrak{A} :

Любое текущее предположение считается верным без доказательства

Например,

- ▶ секвенция $x, x \rightarrow y, z \rightarrow x \vdash x \rightarrow y$ — аксиома
- ▶ а секвенция $x, x \rightarrow y, z \rightarrow x \vdash x \rightarrow z$ — нет

НИВ: правила вывода

В НИВ будут включены 10 правил вывода

В описании этих правил будут использоваться следующие параметры:

- ▶ A и B — произвольные формулы
- ▶ Γ — произвольное множество формул

Чтобы лучше понимать, почему правила вывода устроены именно так, а не по-иному, следует иметь в виду две их трактовки:

- ▶ **Техническая трактовка:** правила устроены так, чтобы можно было с их помощью **добавлять (вводить)** логические операции в формулу правой части секвенции и **удалять** операции из неё
- ▶ **Содержательная трактовка:** в правилах отражены основные принципы построения доказательств, основанные на использовании слов «и», «или», «не» и «если .., то ..» («из .. следует ..»)

НИВ: правила вывода

Правило введения конъюнкции:

$$R_{\&}^+: \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}$$

Содержательная трактовка:

Если (в предположениях Γ) верно « A » и « B », то верно « A и B »

Правила удаления конъюнкции:

$$R_{\&}^-:$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash B}$$

Содержательная трактовка:

Если верно « A и B », то верно « A »

Если верно « A и B », то верно « B »

НИВ: правила вывода

Правило введения импликации (правило дедукции):

$$R_{\rightarrow}^+: \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

Содержательная трактовка:

Если в предположении « A » верно « B »,
то верно утверждение «из A следует B »

Правило удаления импликации (правило отделения; modus ponens):

$$R_{\rightarrow}^-: \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

Содержательная трактовка:

Если верно « A » и верно утверждение «из A следует B », то верно « B »

НИВ: правила вывода

Правила введения дизъюнкции:

$$R_V^+: \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Содержательная трактовка:

Если верно « A », то верно « A или что угодно»

Если верно « B », то верно «что угодно или B »

Правило удаления дизъюнкции (правило разбора случаев):

$$R_V^-: \frac{\Gamma \vdash A \vee B, \Gamma \cup \{A\} \vdash C, \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Содержательная трактовка:

Если

- ▶ верно « A или B »,
- ▶ в предположении « A » верно « C » и
- ▶ в предположении « B » верно « C »,

то верно « C »

НИВ: правила вывода

Правило введения отрицания (правило рассуждения от противного):

$$R_{\neg}^{+}: \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B, \Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Содержательная трактовка:

Если в предположении « A » что-то (« B ») и верно, и неверно,
то « A » неверно (то есть верно «не A »)

Правило удаления отрицания (правило снятия двойного отрицания):

$$R_{\neg}^{-}: \frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Содержательная трактовка:

Если утверждение «неверно A » неверно, то « A » верно

А куда подевались другие полезные законы и правила?