Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 8

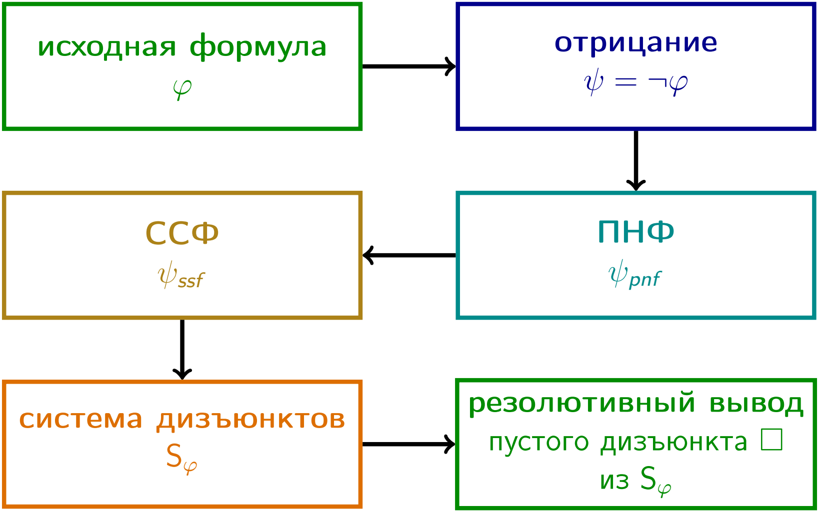
Резолютивный вывод
Корректность резолютивного вывода
Применение метода резолюций
Эрбрановские интерпретации
Теорема Эрбрана

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

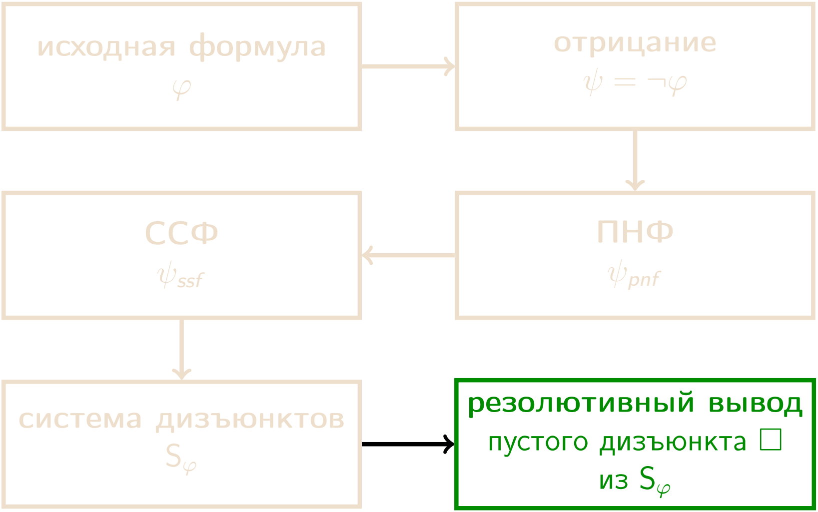
ВМК МГУ, 2019, весенний семестр

Общая схема метода резолюций



$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ система S_φ невыполнима

Общая схема метода резолюций



$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ система S_φ невыполнима

Резолютивный вывод

Ещё немного определений

Положительная литера — это атом

Отрицательная литера — это отрицание атома

Пусть E — логическое выражение и θ — подстановка

Тогда

- $E\theta$ — пример выражения E
- если $\mathsf{Var}_{E\theta} = \emptyset$, то $E\theta$ — основной пример
- если $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Var}$ — биекция, то
  - θ — переименование
  - $E\theta$ — вариант выражения E

Резолютивный вывод

Пример

Рассмотрим выражение E: $\mathrm{P}(x, \mathbf{f}(y)) \vee \neg \mathrm{R}(y, \mathbf{c})$
и подстановки

$$\begin{aligned}
\theta &= \{x/u, y/z, u/x, z/y\} \\
\eta &= \{x/\mathbf{g}(\mathbf{d}), y/z\} \\
\mu &= \{z/\mathbf{c}\} \\
\varepsilon &= \{\}
\end{aligned}$$

Тогда:

- $E\eta$: $\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(z)) \vee \neg \mathrm{R}(z, \mathbf{c})$ — пример выражения E
- $E\eta\mu$: $\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{c})$ — основной пример выражения E
- подстановки θ и ε — переименования
- $E\theta$: $\mathrm{P}(u, \mathbf{f}(z)) \vee \neg \mathrm{R}(z, \mathbf{c})$ — вариант выражения E

Резолютивный вывод

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1,\ \ D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- D_1, D_2 — дизъюнкты
- L_1, L_2 — положительные литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила резолюции
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D_1 \vee D_2)\theta$ — резольвента дизъюнктов $D_1 \vee L_1$, $D_2 \vee \neg L_2$

Литеры L_1, $\neg L_2$ образуют контрарную пару

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \qquad \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}) \vee \neg\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z})}{\neg R(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y}), \mathbf{f}(\mathrm{y})), \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y}))}$$

резольвента

$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{y}), \mathrm{y}),\ \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{y})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})), \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z}))$$

резольвента: $(\neg\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}))\theta$

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x},\mathrm{z}),\mathbf{f}(\mathrm{z})) \qquad \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{x}) \vee \neg\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z},\mathrm{y}),\mathrm{z})}{\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{z}),\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}),\mathrm{z}))) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \neg\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z},\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}),\mathrm{z})),\mathrm{z})}$$

резольвента

$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{z}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}),\mathrm{z})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x},\mathrm{z}),\mathbf{f}(\mathrm{z})),\mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{x}))$$

резольвента: $(\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \neg\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z},\mathrm{y}),\mathrm{z}))\theta$

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$P(\mathbf{f}(x), y) \qquad \neg P(u, \mathbf{g}(v))$$

$$\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\} \in \text{НОУ}(P(\mathbf{f}(x), y), P(u, \mathbf{g}(v)))$$

резольвента: $(???)\theta$

Резолютивный вывод

Пример

контрарная пара

$$\frac{\textbf{false} \vee \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) \qquad \neg \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v})) \vee \textbf{false}}{\square}$$

резольвента

$$\theta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathrm{x})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}), \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v})))$$

резольвента: $(\textbf{false} \vee \textbf{false})\theta$

Резолютивный вывод

Лемма(*о корректности правила резолюции*)

Если D — резольвента дизъюнктов D_1, D_2, то $D_1, D_2 \models D$

Доказательство. (кванторные приставки опущены)

Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1$, $D_2 = D_2' \vee \neg L_2$, $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$,

$D = (D_1' \vee D_2')\theta$ и $L_1\theta = L_2\theta = L$

Тогда будет верно следующее:

$$
\begin{array}{llll}
D_1 \models D_1\theta & & D_2 \models D_2\theta \\
D_1 \models D_1'\theta \vee L_1\theta & & D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L_2\theta \\
D_1 \models D_1'\theta \vee L & & D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L \\
D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee L & & D_1, D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L \\
D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee L & & D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee \neg L
\end{array}
$$

Заметим, что (очевидно?)

если $\Gamma \models A \vee B$ и $\Gamma \models A \vee \neg B$, то $\Gamma \models A$

Тогда $D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta$

То есть $D_1, D_2 \models D$ ▼

Резолютивный вывод

Применение одного только правила резолюции далеко не всегда позволяет вывести $\square$ из противоречивой системы

Например:

$$P(x) \vee P(\mathbf{c})$$
$$\neg P(\mathbf{c}) \vee \neg P(y)$$

Система из таких двух дизъюнктов противоречива, но все резольвенты, резольвенты резольвент, ... этих дизъюнктов имеют ровно две литеры

Необходимо иметь правило, которое позволяет работать и с такими системами дизъюнктов

Резолютивный вывод

Правило склейки

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

Здесь

- D — дизъюнкт
- L_1, L_2 — литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила склейки
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D \vee L_1)\theta$ — склейка дизъюнкта $D \vee L_1 \vee L_2$

Литеры L_1, L_2 образуют склеиваемую пару

Резолютивный вывод

Пример

склеиваемая пара

$$\frac{P(x) \quad \vee \quad \neg R(y, z, \mathbf{f}(x)) \quad \vee \quad \neg R(x, \mathbf{f}(\mathbf{c}), z)}{P(\mathbf{c}) \vee \neg R(\mathbf{c}, \mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathbf{f}(\mathbf{c}))}$$

склейка

$$\theta = \{x/\mathbf{c}, y/\mathbf{c}, z/\mathbf{f}(\mathbf{c})\} \in \text{НОУ}(\neg R(y, z, \mathbf{f}(x)), \neg R(x, \mathbf{f}(\mathbf{c}), z))$$

склейка: $(P(x) \vee \neg R(y, z, \mathbf{f}(x)))\theta$

Лемма(*о корректности правила склейки*)

Если D — склейка дизъюнкта D_1, то $D_1 \models D$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы о корректности правила резолюции

Резолютивный вывод

Пусть S — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из S — это
конечная последовательность дизъюнктов

$$\mathrm{D}_1, \ \ldots, \ \mathrm{D}_i, \ \ldots, \ \mathrm{D}_k,$$

такая что каждый дизъюнкт D_i является

- вариантом дизъюнкта из S,
- склейкой дизъюнкта D_j, где $j < i$, или
- резольвентой дизъюнктов D_j, D_m, где $j < i$ и $m < i$

Дизъюнкт резолютивно выводим из S, если существует
резолютивный вывод из S, оканчивающийся этим дизъюнктом

Резолютивный вывод

Пример

$$S = \{D_1, D_2, D_3\}, \text{ где}$$

$$D_1 = P(x, \mathbf{f}(y)) \vee R(y) \qquad D_2 = \neg R(y)$$

$$D_3 = \neg P(\mathbf{f}(x), z) \vee \neg P(y, y)$$

Резолютивный вывод из S:

вариант	$P(x_1, \mathbf{f}(y_1)) \vee R(y_1)$
вариант	$\neg R(y_2)$
резольвента	$P(x_3, \mathbf{f}(y_3))$
вариант	$\neg P(\mathbf{f}(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$
склейка	$\neg P(\mathbf{f}(x_5), \mathbf{f}(x_5))$
резольвента	$\square$

Пустой дизъюнкт **резолютивно выводим** из системы S

Резолютивный вывод

Возможность использования всевозможных **вариантов** дизъюнктов системы наряду с самими дизъюнктами в резолютивном выводе настолько же важна, насколько и возможность использования резольвент и склеек

Например:

$$S = \{\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))\}$$

$\text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))) = \emptyset$

Значит, у этих дизъюнктов нет ни одной резольвенты

При этом система S противоречива:

у формул $\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{x})$ и $\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))$ **нет общих моделей**

К **вариантам** дизъюнктов из S применимо правило резолюции:

$$\{\mathrm{x}_1/\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x}_1), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)))$$

Корректность использования всевозможных вариантов дизъюнктов обеспечивается следующей равносильностью:

$\forall \mathrm{x}\ \varphi \approx \forall \mathrm{y}\ (\varphi\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\})$, если <...>

Резолютивный вывод

Резолютивный вывод успешен,
если он оканчивается пустым дизъюнктом $\square$

Успешный резолютивный вывод также называется
резолютивным опровержением:

- предположим, что
  исходная система дизъюнктов выполнима
- тогда система, к которой добавлены все дизъюнкты вывода,
  также выполнима (*это будет пояснено дальше*)
- **противоречие:** среди добавленных дизъюнктов
  есть тождественно ложный ($\square$), а значит,
  расширенная система дизъюнктов невыполнима
- полученное противоречие
  опровергает выполнимость исходной системы
  (*доказывает невыполнимость методом "от противного"*)

Корректность резолютивного вывода

Теорема(*о корректности резолютивного вывода*)

Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим пустой дизъюнкт, то система S противоречива

Доказательство.

Вариант D' любого дизъюнкта D равносилен D, а значит, $\mathrm{D} \models \mathrm{D}'$

Корректность правила резолюции:

если D'' — *резольвента* дизъюнктов D_1, D_2, то $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \models \mathrm{D}''$

Корректность правила склейки:

если D''' — *склейка* дизъюнкта D_3, то $\mathrm{D}_3 \models \mathrm{D}'''$

Заметим, что (очевидно?)

$$\text{если } S \models \psi_1, \dots, S \models \psi_k \text{ и } \psi_1, \dots, \psi_k \models \psi, \text{ то } S \models \psi$$

Значит, любой дизъюнкт, выводимый из S, является логическим следствием S, и в частности, $S \models \Box$

При этом дизъюнкт $\Box$ не имеет ни одной модели, а значит, и система S не имеет ни одной модели ▼

Применение метода резолюций

Вспомним, для чего вводился резолютивный вывод

Рассмотрим такую формулу:

$$\varphi : \exists x\, (P(x) \,\&(\forall x\, P(x) \rightarrow \exists y\, R(x,y)) \rightarrow \exists y\, R(x,y))$$

Задача: проверить общезначимость φ

$$\models \varphi\ ?$$

Покажем, как эта задача решается с помощью

метода резолюций

Применение метода резолюций

Решение

Этап 1. Перейти к проверке противоречивости отрицания $\psi = \neg\varphi$

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

Этап 2. Построить равносильную предварённую нормальную форму ψ_{pnf}

$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 3. Построить равновыполнимую сколемовскую стандартную форму ψ_{ssf}

$$\forall x\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 4. Перейти к проверке противоречивости системы S_φ

$$\left\{ \begin{array}{c} P(x) \\ \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)) \\ \neg R(x,u) \end{array} \right\}$$

Применение метода резолюций

Решение

Этап 5. Резолютивно вывести пустой дизъюнкт из S_φ

$$\left\{ \begin{array}{c} P(x) \\ \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)) \\ \neg R(x, u) \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{вариант} & \neg P(\mathbf{f}(x_1)) \vee R(x_1, \mathbf{g}(x_1)) \\
\text{вариант} & P(x_2) \\
\text{резольвента} & R(x_3, \mathbf{g}(x_3)) \\
\text{вариант} & \neg R(x_4, u_4) \\
\text{резольвента} & \square
\end{array}$$

Применение метода резолюций

Решение

Построен успешный резолютивный вывод пустого дизъюнкта из S_φ

Теорема о корректности резолютивного вывода:

система S_φ противоречива

Теорема о переходе к дизъюнктам: ССФ ψ_{ssf} противоречива

Теорема о сколемизации: ПНФ ψ_{pnf} противоречива

Теорема о предварённой нормальной форме:

формула ψ противоречива

$\psi = \neg\varphi$: **формула φ общезначима**

Применение метода резолюций

Для *метода семантических таблиц* были исследованы

- корректность: верно ли, что наличие успешного вывода означает общезначимость формулы
- полнота: верно ли, что отсутствие успешных выводов означает необщезначимость формулы

Построение системы дизъюнктов S_φ по формуле φ — это несложная процедура, и вся “творческая” часть метода резолюций сконцентрирована в построении успешного резолютивного вывода

Если удалось показать, что из S_φ резолютивно выводим $\square$, то формула φ признаётся общезначимой (это корректность)

А верно ли, что из любой противоречивой системы дизъюнктов резолютивно выводим пустой дизъюнкт? (это полнота)

Эрбрановские интерпретации

Система дизъюнктов S противоречива $\Leftrightarrow$
для **любой** интерпретации $\mathcal{I}$ **существуют** дизъюнкт $\forall \widetilde{x}^n\ (L_1 \vee \dots \vee L_m)$ из S и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

$$\mathcal{I} \not\models L_1[\widetilde{d}^n], \qquad \dots, \qquad \mathcal{I} \not\models L_m[\widetilde{d}^n]$$

Иногда при обосновании существования таких наборов $\widetilde{d}^n$ можно избежать явного перебора **всех** интерпретаций и углубления в природу их предметных областей

Например, для доказательства невыполнимости системы $\{P(x),\ \neg P(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\}$ достаточно заметить, что независимо от выбора интерпретации $\mathcal{I}$

либо $\mathcal{I} \not\models \neg P(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$, $\qquad$ либо $\mathcal{I} \not\models P(x)[\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{c}})]$

Попытки рассуждений о смысле формул, использующих только термальное представление предметов без углубления в природу предметной области, неизбежно приводят к **эрбрановским интерпретациям**

Эрбрановские интерпретации

В основе эрбрановских интерпретаций ($\mathcal{H}$-интерпретаций) лежат

свободные алгебры термов[1]

Эрбрановская интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{H}_\sigma, \overline{\mathrm{Const}_{\mathcal{H}}}, \overline{\mathrm{Func}_{\mathcal{H}}}, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$ состоит из

- **стандартной** предметной области $\mathcal{H}_\sigma$: эрбрановского универсума ($\mathcal{H}$-универсума)
  - $\mathcal{H}_\sigma$ — это множество всех *основных термов*[2] сигнатуры
    - σ, если $\mathrm{Const} \neq \emptyset$
    - $\langle \{\mathbf{c}\}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$, если $\mathrm{Const} = \emptyset$

($\mathbf{c}$ — эрбрановская константа)

---

[1] Думали увидеть это название в *лекции 7* и навсегда забыть — но не тут-то было!

[2] *Лекция 3:* это термы, не содержащие переменных

Эрбрановские интерпретации

В основе эрбрановских интерпретаций ($\mathcal{H}$-интерпретаций) лежат
свободные алгебры термов

Эрбрановская интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{H}_\sigma, \overline{\mathsf{Const}_{\mathcal{H}}}, \overline{\mathsf{Func}_{\mathcal{H}}}, \overline{\mathsf{Pred}} \rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle \mathsf{Const}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$ состоит из

- **стандартной** оценки констант $\overline{\mathsf{Const}_{\mathcal{H}}}$:
  - $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$ $\qquad (\mathbf{c} \in \mathsf{Const})$
- **стандартной** оценки функциональных символов $\overline{\mathsf{Func}_{\mathcal{H}}}$:
  - $\bar{\mathbf{f}}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)$ $\qquad (\mathbf{f} \in \mathsf{Func};\ t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma)$
- **произвольной** оценки предикатных символов $\overline{\mathsf{Pred}}$

Эрбрановские интерпретации

$\mathcal{H}$-интерпретации заданной сигнатуры отличаются друг от друга **только** оценкой предикатных символов, то есть при переборе таких интерпретаций можно не задумываться о том, какую природу имеют

- предметная область:
  - это $\mathcal{H}$-универсум
- оценки констант и функциональных символов:
  - значение основного терма — это сам терм

Что более важно: для выяснения того, противоречива ли система дизъюнктов, достаточно проверить, имеет ли она хотя бы одну эрбрановскую модель

(*об этом речь будет идти дальше*)

Эрбрановские интерпретации

Теорема(*об эрбрановских интерпретациях*)
Система дизъюнктов выполнима тогда и только тогда, когда она имеет эрбрановскую модель

Доказательство.

($\Leftarrow$): очевидно

($\Rightarrow$): Пусть S — выполнимая система дизъюнктов
и $\mathcal{I} = \left\langle \mathrm{D}_{\mathcal{I}}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \right\rangle$ — её модель (сигнатуры σ)

Дополним интерпретацию $\mathcal{I}$ произвольной оценкой *эрбрановской константы*, если сигнатура σ не содержит констант

Рассмотрим такое отображение $\alpha : \mathcal{H}_\sigma \to \mathrm{D}_{\mathcal{I}}$:
$\alpha(t)$ — значение **основного** терма t в интерпретации $\mathcal{I}$

Покажем, что моделью для S будет такая **эрбрановская** интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \left\langle \mathcal{H}_\sigma, \overline{\mathrm{Const}}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathrm{Func}}_{\mathcal{H}}, \overline{\overline{\mathrm{Pred}}} \right\rangle$:

$$\overline{\overline{\mathrm{P}}}(t_1, \ldots, t_k) = \overline{\mathrm{P}}(\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k))$$

Эрбрановские интерпретации

Доказательство. ($\Rightarrow$):

Предположим, что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ не является моделью для S

Тогда существует дизъюнкт $A_1 \vee \dots \vee A_m \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_q \in S$, такой что ($A_i$, B_j — атомы)

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, (A_1 \vee \dots \vee A_m \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_q)$$

Значит, существуют основные термы (**предметы** $\mathcal{H}_\sigma$) $t_1, \dots, t_n$, такие что

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_1[t_1, \dots, t_n], \dots, \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_m[t_1, \dots, t_n]$$
$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_1[t_1, \dots, t_n], \dots, \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_q[t_1, \dots, t_n]$$

Отображение α — гомоморфизм интерпретации $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ в интерпретацию $\mathcal{I}$:

$$\alpha(\mathbf{f}(t_1, \dots, t_k)) = \bar{\mathbf{f}}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k))$$

Значит, для любого атома A верно:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models A[t_1, \dots, t_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models A[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)]$$

Эрбрановские интерпретации

Доказательство. ($\Rightarrow$):

$$A_1 \vee \dots \vee A_m \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_q \in S$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_1[t_1, \dots, t_n], \dots, \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_m[t_1, \dots, t_n]$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_1[t_1, \dots, t_n], \dots, \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_q[t_1, \dots, t_n]$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models A[t_1, \dots, t_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models A[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)]$$

Тогда

$$\mathcal{I} \not\models A_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)], \dots, \mathcal{I} \not\models A_m[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)]$$

$$\mathcal{I} \models B_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)], \dots, \mathcal{I} \models B_q[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)]$$

и

$$\mathcal{I} \not\models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (A_1 \vee \dots \vee A_m \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_q)$$

Получено противоречие с тем, что $\mathcal{I}$ — модель для S

Значит, предположение о том, что интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ не является моделью для S, неверно ▼

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановский базис ($B_{\mathcal{H}}$) — это множество всех атомов, построенных над термами эрбрановского универсума

$\mathcal{H}$-интерпретация $\mathcal{I}$ **полностью** определяется тем, какие атомы из $B_{\mathcal{H}}$ в ней истинны, то есть множеством

$$B^{\mathcal{I}} = \{A \mid A \in B_{\mathcal{H}},\ \mathcal{I} \models A\}$$

Например,

- если $B^{\mathcal{I}} = \emptyset$, то все основные атомы **ложны** в $\mathcal{I}$
- если $B^{\mathcal{I}} = B_{\mathcal{H}}$, то все основные атомы **истинны** в $\mathcal{I}$
- множество $B^{\mathcal{I}} \cap B^{\mathcal{J}}$ определяет интерпретацию, в которой истинны те и только те основные атомы, которые истинны в обеих интерпретациях $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$

Далее эрбрановские интерпретации будем отождествлять с подмножествами эрбрановского базиса

Эрбрановские интерпретации

Система дизъюнктов S противоречива

$$\Leftrightarrow$$

Для каждой $\mathcal{H}$-интерпретации $\mathcal{I}$ найдутся дизъюнкт $\mathsf{D} \in S$ и набор основных термов $t_1, \ldots, t_n$, такие что

$$\mathcal{I} \not\models \mathsf{D}[t_1, \ldots, t_n]$$

$$\Leftrightarrow$$

Для каждой $\mathcal{H}$-интерпретации $\mathcal{I}$ существует основной[1] пример[2] D' дизъюнкта $\mathsf{D} \in S$, такой что

$$\mathcal{I} \not\models \mathsf{D}'$$

---

[1] D' не содержит переменных

[2] $\mathsf{D}' = \mathsf{D}\theta$ для некоторой подстановки θ

Эрбрановские интерпретации

Рассмотрим такое множество дизъюнктов $\mathcal{G}_S$:

$$\mathrm{D} \in \mathcal{G}_S \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{D} \text{ — основной пример какого-либо дизъюнкта из } S; \\ \text{существует } \mathcal{H}\text{-интерпретация } \mathcal{I}\text{, такая что } \mathcal{I} \not\models \mathrm{D} \end{cases}$$

Тогда

$$\text{система дизъюнктов } S \text{ противоречива}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{система дизъюнктов } \mathcal{G}_S \text{ противоречива}$$

Эрбрановские интерпретации

Теорема компактности Мальцева: $\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ существует **конечное** подмножество Γ' множества Γ, такое что $\Gamma' \models \varphi$

Следствие: множество замкнутых формул Γ противоречиво $\quad \Leftrightarrow$ существует **конечное** противоречивое подмножество Γ' множества Γ

Применим это следствие к системе $\mathcal{G}_S$:

множество $\mathcal{G}_S$ противоречиво

$$\Leftrightarrow$$

существует **конечное** противоречивое подмножество $\mathcal{G}'$ множества $\mathcal{G}_S$

Только что мы доказали **теорему Эрбрана**

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов противоречива

$\Leftrightarrow$

существует конечное противоречивое множество основных примеров дизъюнктов этой системы

Основной пример дизъюнкта не содержит кванторов и предметных переменных

Значит, конечная система основных примеров дизъюнктов — это (*с небольшими техническими поправками*)
конечная система булевых формул

Значит ли это, что (*неразрешимая*) проблема общезначимости формул логики предикатов *сводится* к (*NP-полной*) проблеме выполнимости булевых формул?

Нет: в теореме Эрбрана не говорится, как построить подходящую систему основных примеров дизъюнктов

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов противоречива

$$\Leftrightarrow$$

существует конечное противоречивое множество основных примеров дизъюнктов этой системы

Теорема Эрбрана является отправной точкой обоснования полноты резолютивного вывода (*в следующей лекции*)

Схема обоснования полноты будет выглядеть так:

- рассмотрим противоречивую систему дизъюнктов S
- существует конечная противоречивая система S' основных примеров этих дизъюнктов
- система S' устроена настолько просто, что из неё можно легко вывести $\square$
- Вывод $\square$ из S' можно (*не так легко, но всё же*) преобразовать в вывод $\square$ из S