Математическая логика

(mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 6

Общая схема метода резолюций
Равносильные формулы
Теорема о равносильной замене
Предварённая нормальная форма
Сколемовская стандартная форма
Системы дизъюнктов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2019, весенний семестр

Напоминание

Проблему общезначимости формул логики предикатов

$$\models \varphi?$$

можно *до некоторой степени* решить с помощью *метода семантических таблиц*

Но этот метод оказался **неэффективным**:

- приходится перебирать много формул
- и подставлять много термов

На ближайших лекциях будет обсуждаться более эффективный метод проверки общезначимости формул логики предикатов:

метод резолюций

Общая схема метода резолюций

$$\models \varphi ?$$

$$\varphi \ \rightsquigarrow\ \psi \ \rightsquigarrow\ \psi_{pnf} \ \rightsquigarrow\ \psi_{ssf} \ \rightsquigarrow\ S_\varphi \ \rightsquigarrow\ \text{вывод } \square$$

$\psi = \neg\varphi$

$\psi_{pnf} = \underset{\exists}{\overset{\forall}{}}\widetilde{x}^n\,(D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k)$ — формула в предварённой нормальной форме $\qquad (D_i = L_1 \vee \dots \vee L_k)$

$\psi_{ssf} = \forall\widetilde{x}^n\,(D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k)$ — формула в сколемовской стандартной форме

$S_\varphi = \{D_1, \dots, D_k\}$ — система дизъюнктов

$\square$ — пустой дизъюнкт (тождественно ложный)

$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \psi$ противоречива

$\Leftrightarrow \quad \psi_{pnf}$ противоречива

$\Leftrightarrow \quad \psi_{ssf}$ противоречива

$\Leftrightarrow \quad S_\varphi$ противоречива

$\Leftrightarrow \quad \square$ резолютивно выводим

Общая схема метода резолюций

$$\models \varphi?$$

$$\varphi \rightsquigarrow \psi \rightsquigarrow \psi_{pnf} \rightsquigarrow \psi_{ssf} \rightsquigarrow S_\varphi \rightsquigarrow \text{вывод } \square$$

$\psi = \neg\varphi$

$\psi_{pnf} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\forall}{\exists}\widetilde{x}^n \, (D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k)$ — формула в предварёной нормальной форме $\quad (D_i = L_1 \vee \dots \vee L_k)$

$\psi_{ssf} = \forall \widetilde{x}^n \, (D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k)$ — формула в сколемовской стандартной форме

$S_\varphi = \{D_1, \dots, D_k\}$ — система дизъюнктов

$\square$ — пустой дизъюнкт (тождественно ложный)

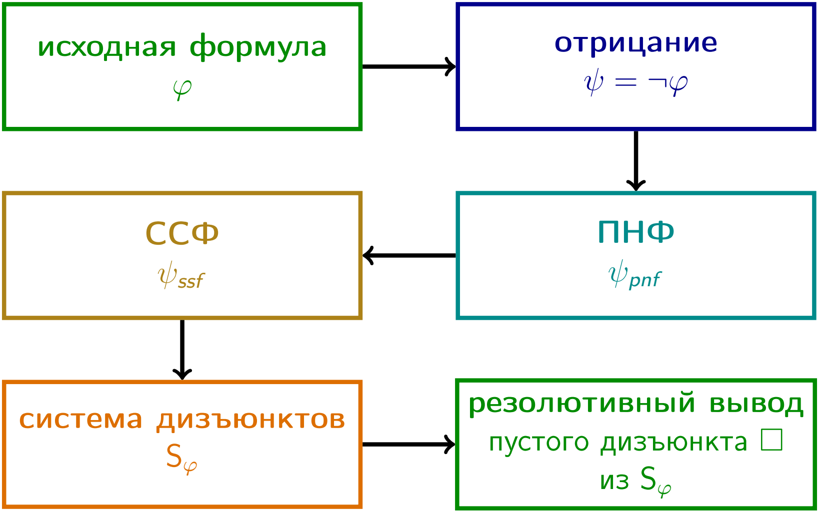
Примеры того, как можно получить пустой дизъюнкт $\square$:

$\dfrac{L, \ \neg L}{\square}$ — при встрече **явного противоречия**

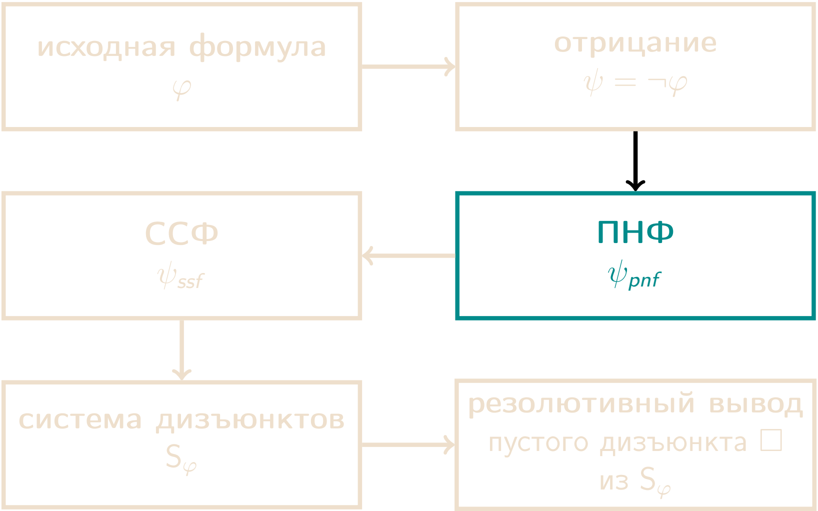
$\dfrac{D' \vee L, D'' \vee \neg L}{D' \vee D''}$ — упрощённый вариант правила резолюции

Итог: $\quad \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ из S_φ резолютивно выводим $\square$

Общая схема метода резолюций



Общая схема метода резолюций



Равносильные формулы

Равносильность (логическая связка):

$\varphi \leftrightarrow \psi$ — это сокращение для $(\varphi \to \psi)\,\&(\psi \to \varphi)$

Формулы φ, ψ равносильны ($\varphi \approx \psi$), если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Утверждение. **Для любых равносильных формул $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, интерпретации $\mathcal{I}$ и набора предметов $\widetilde{d}^n$ справедлива равносильность:**

$$\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$$

Утверждение. **$\approx$ — отношение эквивалентности**

Утверждение. **Если формула φ общезначима (выполнима) [невыполнима], то любая равносильная ей формула ψ также общезначима (выполнима) [невыполнима]**

Доказательство. Самостоятельно

Равносильные формулы: примеры

Законы булевой алгебры

$\varphi \mathbin{\substack{\&\\ \vee}} \psi \approx \psi \mathbin{\substack{\&\\ \vee}} \varphi$ (коммутативность $\substack{\text{конъюнкции}\\ \text{дизъюнкции}}$)

$(\varphi \mathbin{\substack{\&\\ \vee}} \psi) \mathbin{\substack{\&\\ \vee}} \chi \approx \varphi \mathbin{\substack{\&\\ \vee}} (\psi \mathbin{\substack{\&\\ \vee}} \chi)$ (ассоциативность $\substack{\text{конъюнкции}\\ \text{дизъюнкции}}$)

$\varphi \mathbin{\substack{\&\\ \vee}} (\psi \mathbin{\substack{\vee\\ \&}} \chi) \approx (\varphi \mathbin{\substack{\&\\ \vee}} \psi) \mathbin{\substack{\vee\\ \&}} (\varphi \mathbin{\substack{\&\\ \vee}} \chi)$
(дистрибутивность $\substack{\text{дизъюнкции}\\ \text{конъюнкции}}$ относительно $\substack{\text{конъюнкции}\\ \text{дизъюнкции}}$)

$\varphi \mathbin{\substack{\&\\ \vee}} \varphi \approx \varphi$ (идемпотентность $\substack{\text{конъюнкции}\\ \text{дизъюнкции}}$)

$\neg\neg\varphi \approx \varphi$ (инволютивность отрицания)

$\neg(\varphi \mathbin{\substack{\&\\ \vee}} \psi) \approx \neg\varphi \mathbin{\substack{\vee\\ \&}} \neg\psi$ (законы де Моргана)

$\varphi \to \psi \approx \neg\varphi \vee \psi$ (удаление импликации)

$\ldots$

Равносильные формулы: примеры

Правила работы с кванторами

$\substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,\varphi \approx \substack{\forall \\ \exists}\mathtt{y}\,(\varphi\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\})$ (переименование переменных)

(*если* φ *не содержит вхождений* $\mathtt{y}$)

$\neg\substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,\varphi \approx \substack{\exists \\ \forall}\mathtt{x}\,\neg\varphi$ (продвижение отрицания)

$\substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,\varphi \,\&\, \psi \approx \substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,(\varphi \,\&\, \psi)$ (вынесение кванторов)

$\substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,\varphi \vee \psi \approx \substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,(\varphi \vee \psi)$

(*если* ψ *не содержит свободных вхождений* $\mathtt{x}$)

Доказательство (равносильностей). Очевидно

(например, *методом семантических таблиц*)

Равносильные формулы

$\varphi\,[\![\psi]\!]$ — обозначение формулы φ, содержащей подформулу ψ

$\varphi\,[\![\psi/\chi]\!]$ — формула, получающаяся из φ заменой
некоторых (каких угодно) вхождений подформулы ψ на χ

Теорема(*о равносильной замене*)

$$\psi \approx \chi \quad\Rightarrow\quad \varphi\,[\![\psi]\!] \approx \varphi\,[\![\psi/\chi]\!]$$

Доказательство (индукцией по числу операций в φ).

База индукции: $\varphi = \psi$ — очевидно $(\psi \approx \chi \Rightarrow \psi \approx \chi)$

Индуктивный переход. Подробно разберём только один случай:

$$\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}}) = \forall \mathtt{x}\ \varphi'\,[\![\psi]\!]$$

Остальные случаи аналогичны

Равносильные формулы

Доказательство. *Индуктивный переход.*
Утверждение: $\forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi]\!] \approx \forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi/\chi]\!]$
Индуктивное предположение: $\varphi' [\![\psi]\!] \approx \varphi' [\![\psi/\chi]\!]$, то есть

для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любых предметов d, $\widetilde{d}^n$ верно:

$$\mathcal{I} \models (\varphi' [\![\psi]\!] \to \varphi' [\![\psi/\chi]\!])[\mathtt{x}/d, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\varphi' [\![\psi/\chi]\!] \to \varphi' [\![\psi]\!])[\mathtt{x}/d, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Тогда

$$\mathcal{I} \models \forall \mathtt{x}\ (\varphi' [\![\psi]\!] \to \varphi' [\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models \forall \mathtt{x}\ (\varphi' [\![\psi/\chi]\!] \to \varphi' [\![\psi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Лекция 4: $\models \forall \mathtt{x}\ (A \to B) \to (\forall \mathtt{x}\ A \to \forall \mathtt{x}\ B)$, а значит:

$$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi]\!] \to \forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi/\chi]\!] \to \forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Но это и есть $\forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi]\!] \approx \forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi/\chi]\!]$ ▼

Равносильные формулы

Используя равносильную замену, можно существенно изменить форму высказывания, полностью сохранив его смысл

Например,

$\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$	
$\approx$	$\exists x\, \varphi \approx \exists y\, (\varphi\{x/y\})$
$\forall x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$	
$\approx$	$\varphi \to \psi \approx \neg\varphi \vee \psi$
$\neg\forall x\, P(x) \vee \exists y\, P(y)$	
$\approx$	$\neg\forall x\, \varphi \approx \exists x\, \neg\varphi$
$\exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, P(y)$	
$\approx$	$\exists x\, \varphi \vee \psi \approx \exists x\, (\varphi \vee \psi)$; $\quad \varphi \vee \psi \approx \psi \vee \varphi$
$\exists x\, \exists y\, (\neg P(x) \vee P(y))$	
$\approx$	$\varphi \to \psi \approx \neg\varphi \vee \psi$
$\exists x\, \exists y\, (P(x) \to P(y))$	

Предварённая нормальная форма

Замкнутая формула находится в предварённой нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид

$$\underbrace{Q_1 \mathtt{x}_1 \ \ldots Q_n \mathtt{x}_n}_{\text{кванторная приставка}} \ \underbrace{(\mathsf{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathsf{D}_k)}_{\text{матрица}}$$

- $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- матрица — это бескванторная формула в конъюнктивной нормальной форме (КНФ):
  - $\mathsf{D}_i = \mathsf{L}^i_1 \vee \cdots \vee \mathsf{L}^i_{m_i}$ — множитель
  - L^i_j — литера: атом или его отрицание

Наряду с “находится в ПНФ” будем говорить “является ПНФ”

Предварённая нормальная форма

Пример: формула

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u\ (P(x)\,\&\,\neg R(x,u)\,\&(\neg P(y) \vee R(x,z)))$$

находится в **предварённой нормальной форме**:

- кванторная приставка: $\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u$
- матрица: $P(x)\,\&\,\neg R(x,u)\,\&(\neg P(y) \vee R(x,z))$
  - множители: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y) \vee R(x,z)$
  - литеры: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y)$, $R(x,z)$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

Опишем, как можно по замкнутой формуле φ получить равносильную ей ПНФ φ_{pnf} **с помощью равносильных преобразований**

Обозначим этапы преобразования формулы и проиллюстрируем их на примере:

$$\varphi\colon \neg\exists \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

1. *Переименование переменных* $\left(\substack{\forall\\\exists} x\, \varphi \approx \substack{\forall\\\exists} y\, \varphi\{x/y\}\right)$

$$\neg\exists x\, (P(x) \,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$
$$\approx$$
$$\neg\exists x\, (P(x) \,\&(\forall z\, P(z) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$
$$\approx$$
$$\neg\exists x\, (P(x) \,\&(\forall z\, P(z) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists u\, R(x,u))$$

Результат: различными кванторами связаны различные переменные

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

2. *Удаление импликаций* $(\psi \to \chi \approx \neg\psi \vee \chi)$

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\, P(z) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists u\, R(x,u))$$
$$\approx$$
$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\neg\forall z\, P(z) \vee \exists y\, R(x,y)) \to \exists u\, R(x,u))$$
$$\approx$$
$$\neg\exists x\,(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\, P(z) \vee \exists y\, R(x,y))) \vee \exists u\, R(x,u))$$

Результат: формула не содержит импликаций

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

3. *Продвижение отрицаний*

$$(\neg\substack{\forall\\\exists}\mathrm{x}\,\varphi \approx \substack{\exists\\\forall}\mathrm{x}\,\neg\varphi;\ \neg(\psi \substack{\&\\\vee} \chi) \approx \neg\psi \substack{\vee\\\&} \neg\chi;\ \neg\neg\psi \approx \psi)$$

$$\begin{gathered}
\neg\exists \mathrm{x}\,(\neg(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \vee \exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))\\
\approx\\
\forall \mathrm{x}\,\neg(\neg(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \vee \exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))\\
\approx\\
\forall \mathrm{x}\,(\neg\neg(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \,\&\, \neg\exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))\\
\approx\\
\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \,\&\, \neg\exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))\\
\approx\\
\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\exists \mathrm{z}\,\neg\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \,\&\, \forall \mathrm{u}\,\neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))
\end{gathered}$$

Результат: отрицания стоят только над атомарными формулами

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

4. *Вынесение кванторов* $\left(\overset{\forall}{\exists}x\,\varphi \overset{\&}{\vee} \psi \approx \overset{\forall}{\exists}x\,(\varphi \overset{\&}{\vee} \psi);\ \varphi \overset{\&}{\vee} \psi \approx \psi \overset{\&}{\vee} \varphi\right)$

$$\forall x\,(P(x)\,\&(\exists z\,\neg P(z) \vee \exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$
$$\approx$$
$$\forall x\,(P(x)\,\&\,\exists z\,(\neg P(z) \vee \exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$
$$\approx$$
$$\forall x\,(\exists z\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee \exists y\,R(x,y)))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$
$$\approx$$
$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Результат: все кванторы собраны в **кванторную приставку**

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

5. *Получение КНФ* (законы булевой алгебры)

$$\forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x) \,\&(\neg P(z) \vee R(x, y)) \,\& \neg R(x, u))$$

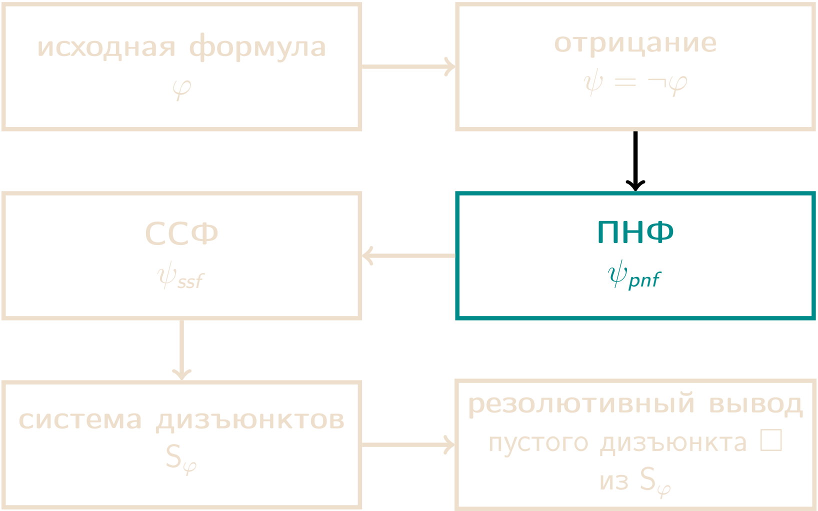
Привести бескванторную формулу к КНФ — это просто

В этом примере под кванторной приставкой уже расположена КНФ

Результат:

получена предварённая нормальная форма, равносильная φ ▼

Общая схема метода резолюций



Общая схема метода резолюций

исходная формула
φ

отрицание
$\psi = \neg\varphi$

ПНФ
ψ_{pnf}

ССФ
ψ_{ssf}

система дизъюнктов
S_φ

резолютивный вывод
пустого дизъюнкта $\square$
из S_φ

Сколемовская стандартная форма

Замкнутая формула находится в
сколемовской стандартной форме (ССФ), если

- она находится в предварённой нормальной форме и
- её кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$:

$$\forall \widetilde{x}^n \, (D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k)$$

Например, формула

$$\forall x \, \forall u \, (P(x) \,\&\, (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \,\&\, \neg R(x, u))$$

находится в сколемовской стандартной форме

Наряду с "находится в ССФ" будем говорить "является ССФ"

Один из этапов метода резолюций —
сведение ПНФ к настолько же (не)выполнимой ССФ

Сколемовская стандартная форма

Лемма(*об удалении квантора существования*). **Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ $\mathbf{f}$ <u>не содержится</u> в χ. Тогда**

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \text{выполнима формула}$$

$$\psi : \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Доказательство (леммы).

($\Leftarrow$): Пусть $\mathcal{I}$ — модель для ψ

Тогда для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно:

$$\mathcal{I} \models \chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}\, [\widetilde{d}^n]$$

Рассмотрим предмет $d_{n+1} = \bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n)$

Будет верно следующее: $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, d_{n+1}]$

Значит, $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi)[\widetilde{d}^n]$, и $\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$

Сколемовская стандартная форма

Лемма(*об удалении квантора существования*). **Пусть** $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$ **— замкнутая формула** ($n \geq 0$) **и функциональный символ $\mathbf{f}$ не содержится в χ. Тогда**

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \text{выполнима формула}$$

$$\psi : \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Доказательство (леммы).

($\Rightarrow$): Пусть $\mathcal{I}$ — модель для φ

Тогда для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ существует предмет d_{n+1}, такой что $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, d_{n+1}]$

По $\mathcal{I}$ построим **новую** интерпретацию $\mathcal{J}$:

если в сигнатуре был функциональный символ $\mathbf{f}$, удалим его
добавим в сигнатуру функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$
оценим $\mathbf{f}$ так, чтобы выполнялось: $\bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n) = d_{n+1}$

Тогда $\mathcal{J} \models \chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}\, [\widetilde{d}^n]$,
а значит, $\mathcal{J} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$ ▼

Сколемовская стандартная форма

Лемма(*об удалении квантора существования*). Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1}\, \chi$ **— замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ f <u>не содержится</u> в χ. Тогда**

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \text{выполнима формула}$$

$$\psi : \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}} \left(\chi \left\{ \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1} / \mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \right\} \right)$$

Небольшая вольность: если слева от $\exists$ не стоит ни одного $\forall$, то, согласно лемме, **f** — 0-местный функциональный символ, то есть **константа**, и ψ имеет вид $\chi \left\{ \mathtt{x}_{\mathtt{n}+1} / \mathbf{f} \right\}$

Сколемизация — это устранение кванторов $\exists$ с введением новых символов с целью получить более простую “хорошую” формулу (*здесь — сохраняющую выполнимость и невыполнимость*)

При устранении $\exists$ на место удаляемой переменной подставляются сколемовские термы (*здесь* — $\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$)

Сколемовская стандартная форма

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}

Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Как работает алгоритм:

$\varphi_{pnf} : \forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \exists \mathtt{x}_k \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \exists \mathtt{x}_m \ \ldots \ \chi$

$\forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \exists \mathtt{x}_m \ \ldots \ (\chi \{\mathtt{x}_k / \mathbf{f}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{k-1})\})$

$$\forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \ldots$$
$$(\chi \{\mathtt{x}_k / \mathbf{f}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{k-1}), \mathtt{x}_m / \mathbf{g}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{k-1}, \mathtt{x}_{k+1}, \ldots, \mathtt{x}_{m-1})\})$$

$$\ldots$$

$$Sk(\varphi_{pnf})$$

Требования к выбору функциональных символов:

- формула χ не содержит вхождений символа $\mathbf{f}$
- символы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ различны
- формула χ не содержит вхождений символа $\mathbf{g}$, ...

Сколемовская стандартная форма

Пример

$$\varphi_{pnf}: \quad \forall x\, \exists z\, \exists y\, \forall u\, (P(x) \,\&(\neg P(z) \vee R(x,y)) \,\&\, \neg R(x,u))$$

$$\forall x\, \exists y\, \forall u\, (P(x) \,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,y)) \,\&\, \neg R(x,u))$$

$$Sk(\varphi_{pnf}): \quad \forall x\, \forall u\, (P(x) \,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x))) \,\&\, \neg R(x,u))$$

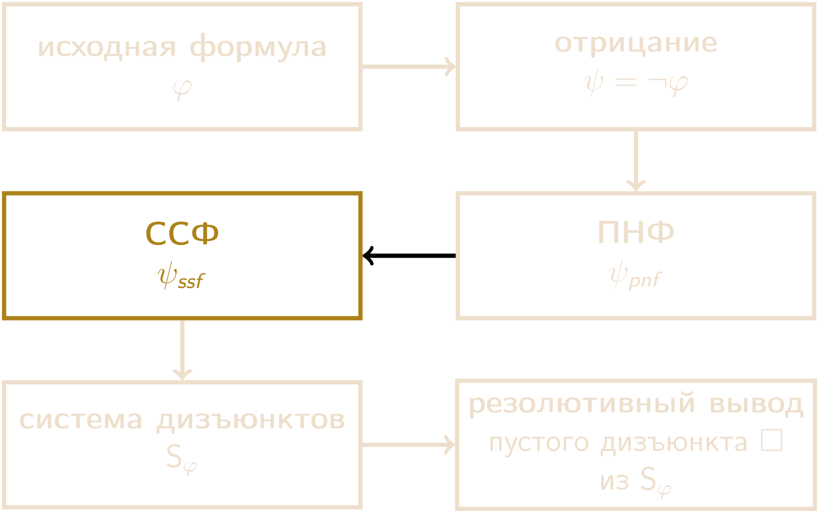
Теорема(*о сколемизации*). Если φ_{pnf} — ПНФ, то $Sk(\varphi_{pnf})$ — ССФ, для которой верно следующее:

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

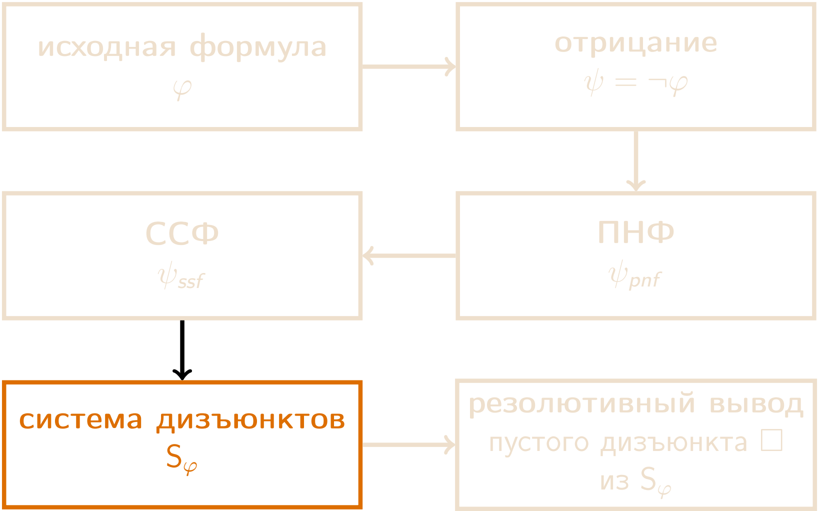
Доказательство. Достаточно **конечное** число раз применить *лемму об удалении квантора существования* ▼

А если в формулировке теоремы заменить
“выполнима” на “общезначима”,
останется ли она справедливой?

Общая схема метода резолюций



Общая схема метода резолюций



Системы дизъюнктов

Дизъюнкт — это ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \widetilde{x}^n \, (L_1 \vee \dots \vee L_k)$$

Здесь L_i — это литера: атом или его отрицание

Для краткости кванторную приставку будем опускать
(*вместо дизъюнкта записывать его единственный множитель*)

Небольшая вольность: чтобы упростить технические выкладки, будем считать, что дизъюнкт **не изменяется** при перестановке слагаемых; например, $L_1 \vee L_2$ и $L_2 \vee L_1$ — один и тот же дизъюнкт

Пустой дизъюнкт $\square$ — это дизъюнкт, не содержащий ни одной литеры

Пустой дизъюнкт считается **невыполнимым**:

$L_1 \vee \dots \vee L_k \approx L_1 \vee \dots \vee L_k \vee \mathbf{false}$, а значит, $\square \approx \mathbf{false}$

Система дизъюнктов невыполнима (противоречива), если она не имеет модели

Системы дизъюнктов

Утверждение. $\forall x\,(\varphi \,\&\, \psi) \approx \forall x\,\varphi \,\&\, \forall x\,\psi$

Доказательство. Очевидно

(достаточно применить *метод семантических таблиц*)

Теорема(*о переходе к дизъюнктам*)

ССФ $\forall \widetilde{x}^n\,(D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k)$ **невыполнима**

$\Leftrightarrow$

система дизъюнктов $\{D_1, \dots, D_k\}$ **невыполнима**

Доказательство.

По утверждению выше: $\forall \widetilde{x}^n\,(D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k) \approx \forall \widetilde{x}^n\,D_1 \,\&\, \dots \,\&\, \forall \widetilde{x}^n\,D_k$

Значит, $\not\models \forall \widetilde{x}^n\,(D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k) \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \forall \widetilde{x}^n\,D_1 \,\&\, \dots \,\&\, \forall \widetilde{x}^n\,D_k$

$\Leftrightarrow$ система $\{\forall \widetilde{x}^n\,D_1, \dots, \forall \widetilde{x}^n\,D_2\}$ не имеет модели ▼

Системы дизъюнктов

Сводный итог:

$$\models \varphi ?$$

$$
\begin{aligned}
\varphi \text{ общезначима} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi = \neg\varphi \text{ невыполнима} \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi_{pnf} \text{ невыполнима} \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi_{ssf} = \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}} \, (D_1 \,\&\, \dots \,\&\, D_k) \text{ невыполнима} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{система } S_\varphi = \{D_1, \dots, D_k\} \text{ невыполнима}
\end{aligned}
$$

Проверка общезначимости формул сведена к проверке невыполнимости конечных систем дизъюнктов

Системы дизъюнктов

Пример

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))\ ?$$

Отрицание $\psi = \neg\varphi$*:*

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

Предварённая нормальная форма ψ_{pnf}*:*

$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Сколемовская стандартная форма ψ_{ssf}*:*

$$\forall x\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Система дизъюнктов S_φ*:*

$$\left\{\begin{array}{c} P(x) \\ \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)) \\ \neg R(x,u) \end{array}\right\}$$

Следующий шаг метода резолюций —
проверка (не)выполнимости конечной системы дизъюнктов

Противоречия в системах дизъюнктов

- $\{P(x),\ \neg P(x)\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] P(x) \arrow[dr] & & \neg P(x) \arrow[dl] \\ & \square & \end{tikzcd}$$

явное противоречие

- $\{\neg P(x),\ \neg Q(y),\ P(x) \vee Q(y)\}$

$$\begin{tikzcd} \neg P(x) \arrow[dr] & P(x) \vee Q(y) \arrow[d] & \neg Q(y) \arrow[ddl] \\ & Q(y) \arrow[d] & \\ & \square & \end{tikzcd}$$

явное противоречие

$\forall x\ \neg P(x),\ \forall x\ \forall y\ (P(x) \vee Q(y)) \models \forall y\ Q(y)$

Противоречия в системах дизъюнктов

- $\{P(\mathbf{f}(x), y),\ \neg P(u, \mathbf{g}(v))\}$

$$\begin{tikzcd}
P(\mathbf{f}(x), y) \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & & \neg P(u, \mathbf{g}(v)) \arrow[d, dotted] \arrow[dl] \\
P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v)) \arrow[r, dotted] & \square & \neg P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v)) \arrow[l, dotted]
\end{tikzcd}$$

неявное противоречие

$\forall x\, \forall y\ P(\mathbf{f}(x), y) \models \forall x\, \forall v\ P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$

$\forall u\, \forall v\ \neg P(u, \mathbf{g}(v)) \models \forall x\, \forall v\ \neg P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$

Чтобы обнаружить неявное противоречие, потребовалось выделить из атомов общий частный случай

Приведение выражений к общему виду называется унификацией, и перед описанием последнего этапа метода резолюций (**резолютивного вывода** $\square$) необходимо строго сформулировать и научиться решать эту задачу