Лекция 8. Раскраски. Эквивалентность раскрасок относительно группы. Производящие функции. Перечисляющий ряд для фигур и перечисляющий ряд для функций. Теорема Пойа.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.su

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Раскраски

Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество цветов.

Раскраской элементов множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ в m цветов называется отображение

$$f : N \to M.$$

Множество всех раскрасок элементов множества N в m цветов обозначим как $R(N, M)$.

Теорема 1. $|R(N, M)| = m^n$.

Эквивалентность раскрасок

Пусть конечная группа G действует на конечном множестве $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

Определим бинарное отношение R_G на множестве $R(N, M)$: если $f_1, f_2 \in R(N, M)$, то

$$f_1 \; R_G \; f_2 \Leftrightarrow \exists g \in G : \forall x \in N \;\; f_2(x) = f_1(\pi_g(x)).$$

Эквивалентность раскрасок

Теорема 2. *Отношение R_G является отношением эквивалентности на множестве $R(N, M)$.*

Доказательство. Свойства отношения эквивалентности.

1) Рефлексивность. Для каждой раскраски $f(x) \in R(N, M)$ выберем $e \in G$ — нейтральный элемент. Тогда $f(\pi_e(x)) = f(x)$ для каждого $x \in N$, поэтому $f \ R_G \ f$.

2) Симметричность. Пусть для раскрасок $f_1(x), f_2(x) \in R(N, M)$ верно $f_1 \ R_G \ f_2$, т.е. найдется такой элемент $g \in G$, что $f_2(x) = f_1(\pi_g(x))$ для каждого $x \in N$. Тогда

$$\begin{aligned} &f_2(x) = f_1(\pi_g(x)), \\ &f_2(\pi_{g'}(x)) = f_1(\pi_{g'}(\pi(x))) = f_1(\pi_g^{-1}(\pi_g(x))), \\ &f_2(\pi_{g'}(x)) = f_1(x), \end{aligned}$$

где элемент g' симметричен к элементу g в группе G. Поэтому $f_2 \ R_G \ f_1$.

Эквивалентность раскрасок

Доказательство (продолжение).

3) Транзитивность. Пусть для раскрасок $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \in R(N, M)$ верно $f_1 \ R_G \ f_2$ и $f_2 \ R_G \ f_3$, т.е. найдутся такие элементы $g_1 \in G$ и $g_2 \in G$, что $f_2(x) = f_1(\pi_{g_1}(x))$ и $f_3(x) = f_2(\pi_{g_2}(x))$. Тогда

$$f_1(\pi_{g_1 * g_2}(x)) = f_1((\pi_{g_1} \circ \pi_{g_2})(x)) =$$
$$f_1(\pi_{g_1}(\pi_{g_2}(x))) = f_2(\pi_{g_2}(x)) = f_3(x).$$

Т.к. G — группа, $g_1 * g_2 \in G$, поэтому $f_1 \ R_G \ f_3$.

$\square$

Эквивалентность раскрасок

Отношение эквивалентности R_G обозначается как $\sim_G$.

Если для раскрасок $f_1, f_2 \in R(N, M)$ верно $f_1 \sim_G f_2$, то говорят, что раскраски f_1 и f_2 **эквивалентны по группе** G (или **относительно группы** G).

Пример: раскраски вершин правильного треугольника

Пример. Рассмотрим раскраски вершин правильного треугольника в два цвета: красный и синий.
Тогда раскраски

$$f_1 : 1 \to \text{красный}, \; 2, 3 \to \text{синий},$$

и

$$f_2 : 3 \to \text{красный}, \; 1, 2 \to \text{синий},$$

эквивалентны относительно группы H вращений правильного треугольника в плоскости (при тождественном действии), т.к. для перестановки $\pi = (123) \in H$ верно $f_1(\pi(x)) = f_2(x)$.
А раскраски f_1 и

$$f_3 : 1, 2 \to \text{красный}, \; 3 \to \text{синий},$$

неэквивалентны относительно группы H. Почему?

Орбита раскраски

Для раскраски $f \in R(N, M)$ ее **орбитой** в группе G называется класс эквивалентности этой раскраски по отношению эквивалентности $\sim_G$.

Обозначение: O_f,

$$O_f = \{f(\pi_g(x)) \mid g \in G\}.$$

Число различных орбит (относительно группы G) — число неэквивалентных раскрасок (относительно группы G).

В каких случаях возникают такие задачи?

Подсчет числа ожерелий

Задача подсчета **числа ожерелий**.

Сколько различных ожерелий можно составить из n бусин m цветов?
Два ожерелья считаются **одинаковыми**, если одно из них получается из другого вращением в плоскости (без зеркальных отражений).

Эта задача состоит **в подсчете числа орбит раскрасок** вершин правильного n-угольника в m цветов относительно группы G вращений этого n-угольника в плоскости.

Классификация функций алгебры логики

Задача подсчета **числа классов эквивалентностей функций алгебры логики**.

Сколько есть различных функций алгебры логики, зависящих от n переменных, каждая из которых **не может быть получена** из другой навешиванием отрицаний над переменными?

Например, пусть $n = 2$. Тогда функции

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \text{ и } f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1 = x_1 \bar{x}_2$$

могут быть получены одна из другой навешиванием отрицаний над переменными, а функции

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \text{ и } f_3(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$$

не могут (почему?).

Классификация функций алгебры логики

Заметим, что каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определяет на кубе E_2^n **раскраску** его вершин **в два цвета**: 0 и 1.

Поэтому задача состоит **в подсчете числа орбит раскрасок** вершин куба E_2^n в 2 цвета (0 или 1) относительно некоторой группы перестановок G, $G \subseteq S_{2^n}$, вершин куба E_2^n.

Эта группа перестановок вершин куба называется **группой инвертирования переменных** (или **группой сдвигов**) J_n.

Теорема Пойа (частный случай)

Метод решения перечисленных задач дает **теорема Пойа**.

Теорема 3 (Пойа). *Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Число $N(G, m)$ орбит раскрасок в m цветов по группе G равно*

$$N(G; m) = Z_G(t_1 = m, \ldots, t_n = m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m^{\lambda_1(\pi_g)} \cdot \ldots \cdot m^{\lambda_n(\pi_g)},$$

где $Z_G(t_1, \ldots, t_n)$ — цикловой индекс группы G.

Теорема Пойа

Доказательство. Пусть $R(N, M) = \{f_1, \dots, f_{m^n}\}$.

Для каждого элемента $g \in G$ построим соответствующую ему перестановку $\Pi_g \in S(R(N, M))$:

$$\Pi_g = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_{m^n}(x) \\ f_1(\pi_g(x)) & f_2(\pi_g(x)) & \dots & f_{m^n}(\pi_g(x)) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$S_1 = \{\Pi_g \mid g \in G\}.$$

Теорема Пойа

Доказательство (продолжение). Проверим, что $G_1 = (S_1, \circ)$ является группой.

Свойства группы.
1) Ассоциативность операции $\circ$.
2) Существование нейтрального элемента: $\Pi_e \in G_1$, где e — нейтральный элемент в группе G.
3) Для каждого элемента $\Pi_g \in G_1$ существование обратного элемента: $\Pi_{g'} \in G_1$, где элемент g' симметричен к элементу g в группе G.

Группы G и G_1 изоморфны, и изоморфизм

$$\varphi : G \to G_1,\ \ g \mapsto \Pi_g.$$

Теорема Пойа

Доказательство (продолжение). Тогда число орбит $N(G; m)$ раскрасок элементов множества N в m цветов равно числу орбит $N(G_1)$ элементов множества $R(N, M)$ по группе G_1.
По лемме Бернсайда

$$N(G_1) = \frac{1}{|G_1|} \sum_{g \in G} \lambda_1(\Pi_g).$$

Заметим, что $|G_1| = |G|$, и
$\lambda_1(\Pi_g) = m^{\lambda_1(\pi_g)} \cdot m^{\lambda_2(\pi_g)} \cdot \ldots \cdot m^{\lambda_n(\pi_g)}$. Почему?
Т.к. $f_2(\pi_g(x)) = f_1(x)$ в том и только в том случае, когда **для каждого цикла** перестановки π_g все его **элементы окрашены в один и тот же цвет**. А значит, для каждого из циклов есть только m возможностей окрасить его элементы.

Теорема Пойа

Доказательство (продолжение). Тогда

$$N(G;m) = N(G_1) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m^{\lambda_1(\pi_g)}\cdot\ldots\cdot m^{\lambda_n(\pi_g)},$$

или

$$N(G;m) = Z_G(t_1 = m, \ldots, t_n = m).$$

$\square$

Пример: подсчет числа ожерелий

Пример. Найдем число различных ожерелий из 3-х бусин 2-х цветов. Т.е. найдем число орбит раскрасок в два цвета вершин правильного треугольника по группе H его вращений в плоскости. По теореме Пойа

$$N(H;2) = Z_H(t_1 = 2, t_2 = 2, t_3 = 2).$$

Напомним, что

$$Z_H(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3}(t_1^3 + 2t_3).$$

Тогда

$$N(H;2) = \frac{1}{3}(2^3 + 2 \cdot 2) = 4.$$

Какие раскраски определяют эти орбиты?
1) Все вершины красные; 2) две вершины красные, одна синяя;
3) одна вершина красная, две синие; 4) все вершины синие.

Пример: классификация функций алгебры логики

Пример. Найдем число различных функций алгебры логики, зависящих от 2-х переменных, таких, что ни одна из них не может быть получена ни из какой другой навешиванием отрицаний над переменными.

Найдем цикловой индекс группы J_2:

N	x x_1x_2		$\pi_1(x)$ x_1x_2	$\pi_2(x)$ $x_1\bar{x}_2$	$\pi_3(x)$ $\bar{x}_1x_2$	$\pi_4(x)$ $\bar{x}_1\bar{x}_2$
1	00		00(1)	01(2)	10(3)	11(4)
2	01		01(2)	00(1)	11(4)	10(3)
3	10		10(3)	11(4)	00(1)	01(2)
4	11		11(4)	10(3)	01(2)	00(1)

Получаем, что $\lambda(\pi_1) = (4, 0, 0, 0)$, и $\lambda(\pi_i) = (0, 2, 0, 0)$ при $i = 2, 3, 4$.

Пример: классификиция функций алгебры логики

Пример (продолжение). Поэтому

$$Z_{J_2}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}(t_1^4 + 3t_2^2).$$

По теореме Пойа

$$N(J_2; 2) = Z_{J_2}(2, 2, 2, 2) = \frac{1}{4}(2^4 + 3 \cdot 2^2) = 7.$$

Какие это функции? Здесь они перечислены:

$$0;\ 1;\ x_1;\ x_2;\ x_1x_2,\ x_1 \oplus x_2;\ x_1 \vee x_2.$$

Подсчет числа ожерелий с ограничениями

А как найти число различных ожерелий из 5 бусин 3-х цветов — красного, синего и белого, в которых ровно одна белая бусина?

Или, как подсчитать число различных ожерелий из 7 бусин 3-х цветов — красного, синего и белого, в которых не менее 3-х красных бусин?

Ответ дает **общий случай теоремы Пойа**.

Производящие функции

Для последовательности чисел $\{a_n\}$ рассмотрим формальную сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, где $t \in \mathbb{R}$.

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сходится в некоторой области $t \in D$, то в области D эта сумма определяет функцию

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Эта функция называется **производящей функцией** для последовательности $\{a_n\}$.

Над производящими функциями определяются операции сложения, умножения и т.д. как соответствующие операции над соответствующими рядами.

Раскраски

Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество цветов, и $f : N \to M$ — раскраска элементов из N в m цветов.

Множество всех раскрасок элементов из N в m цветов обозначается как $R(N, M)$

Раскраски $f_1(x), f_2(x) \in R(N, M)$ эквивалентны относительно группы G ($f_1 \sim_G f_2$), если

$$\exists g \in G : \forall x \in N \ f_2(x) = f_1(\pi_g(x)).$$

Перечисляющий ряд для фигур

Пусть на множестве цветов M задана функция **весов** $w : M \to \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ — расширенный натуральный ряд.

Пусть q_j — число цветов веса j в множестве M.

Производящая функция

$$Q(t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j t^j$$

называется **перечисляющим рядом для фигур**.

Вес орбиты раскраски

Вес раскраски $f(x) \in R(N, M)$ определяется как

$$w(f) = \sum_{x \in N} w(f(x)).$$

Если $f_1 \sim_G f_2$, то $w(f_1) = w(f_2)$.
Поэтому введем **вес орбиты** O_f как вес любого ее элемента.
Т.е.

$$w(O_f) = w(f).$$

Перечисляющий ряд для функций

Пусть φ_j — число орбит веса j в $R(N, M)$.

Производящая функция

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j t^j$$

называется **перечисляющим рядом для функций** (или **перечисляющим рядом для конфигураций**).

Теорема Пойа (общий случай)

Рассмотрим общий случай **теоремы Пойа**.

Теорема 4 (Пойа). *Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, и $w : M \to \mathbb{N}_0$ — функция весов цветов из $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда перечисляющий ряд для функций $\Phi(t)$ равен*

$$\Phi(t) = Z_G(t_1 = Q(t), \ldots, t_n = Q(t^n)),$$

где $Z_G(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} t_1^{\lambda_1(\pi_g)} \cdot \ldots \cdot t_n^{\lambda_n(\pi_g)}$ — цикловой индекс группы G, а $Q(t)$ — перечисляющий ряд для фигур.

Теорема Пойа (общий случай)

Доказательство.
Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$, и пусть $\lambda(\pi_g) = (\lambda_1(\pi_g), \ldots, \lambda_n(\pi_g))$. Пусть $\varphi_j(\pi_g)$ — число раскрасок веса j, которые перестановка π_g оставляет на месте.
Покажем, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\pi_g) t^j = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j_i=0}^{\infty} q_{j_i} t^{i \cdot j_i} \right)^{\lambda_i(\pi_g)} .$$

В самом деле, для $f(x) = f(\pi_g(x))$ необходимо и достаточно, чтобы каждый цикл перестановки π_g был окрашен в один цвет.
В скобках выписаны перечисляющие ряды для фигур по каждому циклу перестановки π_g. Произведение этих перечисляющих рядов равно перечисляющему ряду для функций.

Теорема Пойа (общий случай)

Теперь просуммируем найденное равенство по всем элементам группы G с учетом соотношения

$$\sum_{j_i=0}^{\infty} q_{j_i} t^{i \cdot j_i} = Q(t^i),$$

где $Q(t)$ — перечисляющий ряд для фигур.

Получаем

$$\sum_{g \in G} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\pi_g) t^j = \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{n} (Q(t^i))^{\lambda_i(\pi_g)}.$$

Теорема Пойа (общий случай)

Отметим, что

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(\pi_g)t^j=\sum_{j=0}^{\infty}t^j\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi_j(\pi_g)\right).$$

По лемме Бернсайда $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\varphi_j(\pi_g)=\varphi_j$, т.к. $\varphi_j(\pi_g)$ равно числу раскрасок, которые перестановка π_g оставляет на месте. Поэтому получаем

$$\Phi(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j t^j=Z_G(Q(t),Q(t^2),\ldots,Q(t^n)).$$

$\square$

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Пример. Найдем число различных ожерелий из 5-х бусин красного, синего и *белого* цветов, в которых **ровно одна** *белая* бусина.

Найдем цикловой индекс группы H_5 вращений правильного пятиугольника в плоскости (проверьте!):

$$Z_{H_5}(t_1, \dots, t_5) = \frac{1}{5}(t_1^5 + 4t_5).$$

Введем функцию весов цветов w так, что

$$w(\textit{белый}) = 1;\; w(\text{красный}) = w(\text{синий}) = 0.$$

Тогда производящий ряд фигур имеет вид:

$$Q(t) = 2 + t.$$

По теореме Пойа

$$\Phi(t) = Z_{H_5}(Q(t), Q(t^2), Q(t^3), Q(t^4), Q(t^5)) = \frac{1}{5}((2+t)^5+4(2+t^5)).$$

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Пример (продолжение). С другой стороны,

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j t^j,$$

где φ_j — число орбит раскрасок веса j.

Нам надо найти число φ_1 орбит раскрасок с весом $j = 1$:
ровно одна *белая* бусина!
Поэтому в многочлене

$$\Phi(t) = \frac{1}{5}((2+t)^5 + 4(2+t^5)).$$

надо найти коэффициент при t^1.

Получаем: $\varphi_1 = \frac{1}{5} \cdot C_5^4 \cdot 2^4 = 16$.
Значит, найдется 16 таких ожерелий с одной *белой* бусиной.

Задачи для самостоятельного решения

1. [2] Гл. VIII 4.9–4.10.

2. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из p бусин 2-х цветов, если p — простое число.

3. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из 6-ти бусин красного, синего и белого цветов, в которых
1) ровно две белые бусины;
2) не менее двух белых бусин;
3) не более двух белых бусин;
4) две бусины белые и есть хотя бы одна красная бусина.

4. По теореме Пойа найти число раскрасок граней правильного тетраэдра
1) в два цвета;
2) в синий, красный и зеленый цвета так, что есть хотя бы одна грань каждого из цветов.

Литература к лекции

1. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 57–61.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. С. 273–275.

Конец лекции