Лекция 8. Раскраски. Эквивалентность раскрасок относительно группы. Теорема Пойа (частный случай). Примеры.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Раскраски

Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество цветов.

Раскраской элементов множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ в m цветов называется отображение

$$f : N \to M.$$

Множество всех раскрасок элементов множества N в m цветов обозначим как $R(N, M)$.

Теорема 1. $|R(N, M)| = m^n$.

Эквивалентность раскрасок

Пусть конечная группа G действует на конечном множестве $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

Определим бинарное отношение R_G на множестве $R(N, M)$: если $f_1, f_2 \in R(N, M)$, то

$$f_1 \; R_G \; f_2 \Leftrightarrow \exists g \in G : \forall x \in N \;\; f_2(x) = f_1(\pi_g(x)).$$

Эквивалентность раскрасок

Теорема 2. *Отношение R_G является отношением эквивалентности на множестве $R(N, M)$.*

Доказательство. Свойства отношения эквивалентности.

1) Рефлексивность. Для каждой раскраски $f(x) \in R(N, M)$ выберем $e \in G$ — нейтральный элемент. Тогда $f(\pi_e(x)) = f(x)$ для каждого $x \in N$, поэтому $f \ R_G \ f$.

2) Симметричность. Пусть для раскрасок $f_1(x), f_2(x) \in R(N, M)$ верно $f_1 \ R_G \ f_2$, т.е. найдется такой элемент $g \in G$, что $f_2(x) = f_1(\pi_g(x))$ для каждого $x \in N$. Тогда

$$f_2(\pi_{g'}(x)) = f_1(\pi_g(\pi_{g'}(x))) = f_1(\pi_g(\pi_g^{-1}(x))) = f_1(x),$$

где элемент g' симметричен к элементу g в группе G. Поэтому $f_2 \ R_G \ f_1$.

Эквивалентность раскрасок

Доказательство (продолжение).

3) Транзитивность. Пусть для раскрасок $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \in R(N, M)$ верно $f_1 \ R_G \ f_2$ и $f_2 \ R_G \ f_3$, т.е. найдутся такие элементы $g_1 \in G$ и $g_2 \in G$, что $f_2(x) = f_1(\pi_{g_1}(x))$ и $f_3(x) = f_2(\pi_{g_2}(x))$. Тогда

$$f_1(\pi_{g_1 * g_2}(x)) = f_1((\pi_{g_1} \circ \pi_{g_2})(x)) =$$
$$f_1(\pi_{g_1}(\pi_{g_2}(x))) = f_2(\pi_{g_2}(x)) = f_3(x).$$

Т.к. G — группа, $g_1 * g_2 \in G$, поэтому $f_1 \ R_G \ f_3$.

$\square$

Эквивалентность раскрасок

Отношение эквивалентности R_G обозначается как $\sim_G$.

Если для раскрасок $f_1, f_2 \in R(N, M)$ верно $f_1 \sim_G f_2$, то говорят, что раскраски f_1 и f_2 **эквивалентны по группе** G (или **относительно группы** G).

Пример: раскраски вершин правильного треугольника

Пример. Рассмотрим раскраски вершин правильного треугольника в два цвета: красный и синий.
Тогда раскраски

$$f_1 : 1 \to \text{красный},\ \ 2, 3 \to \text{синий},$$

и

$$f_2 : 3 \to \text{красный},\ \ 1, 2 \to \text{синий},$$

эквивалентны относительно группы H вращений правильного треугольника в плоскости (при тождественном действии), т.к. для перестановки $\pi = (123) \in H$ верно $f_1(\pi(x)) = f_2(x)$.
А раскраски f_1 и

$$f_3 : 1, 2 \to \text{красный},\ \ 3 \to \text{синий},$$

неэквивалентны относительно группы H. Почему?

Орбита раскраски

Для раскраски $f \in R(N, M)$ ее **орбитой** в группе G называется класс эквивалентности этой раскраски по отношению эквивалентности $\sim_G$.

Обозначение: O_f,

$$O_f = \{f(\pi_g(x)) \mid g \in G\}.$$

Число различных орбит (относительно группы G) — число неэквивалентных раскрасок (относительно группы G).

В каких случаях возникают такие задачи?

Подсчет числа ожерелий

Задача подсчета **числа ожерелий**.

Сколько различных ожерелий можно составить из n бусин m цветов?
Два ожерелья считаются **одинаковыми**, если одно из них получается из другого вращением в плоскости (без зеркальных отражений).

Эта задача состоит **в подсчете числа орбит раскрасок** вершин правильного n-угольника в m цветов относительно группы G вращений этого n-угольника в плоскости.

Классификация функций алгебры логики

Задача подсчета **числа классов эквивалентностей функций алгебры логики**.

Сколько есть различных функций алгебры логики, зависящих от n переменных, каждая из которых **не может быть получена** из другой навешиванием отрицаний над переменными?

Например, пусть $n = 2$. Тогда функции

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \text{ и } f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1 = x_1 \bar{x}_2$$

могут быть получены одна из другой навешиванием отрицаний над переменными, а функции

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \text{ и } f_3(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$$

не могут (почему?).

Классификация функций алгебры логики

Заметим, что каждая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определяет на кубе E_2^n **раскраску** его вершин **в два цвета**: 0 и 1.

Поэтому задача состоит **в подсчете числа орбит раскрасок** вершин куба E_2^n в 2 цвета (0 или 1) относительно некоторой группы перестановок G, $G \subseteq S_{2^n}$, вершин куба E_2^n.

Эта группа перестановок вершин куба называется **группой инвертирования переменных** (или **группой сдвигов**) J_n.

Теорема Пойа (частный случай)

Метод решения перечисленных задач предлагает **теорема Пойа**.

Теорема Пойа (частный случай)

Теорема 3 (Пойа). *Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Число $N(G, m)$ орбит раскрасок в m цветов по группе G равно*

$$N(G; m) = Z_G(t_1 = m, \dots, t_n = m),$$

где $Z_G(t_1, \dots, t_n)$ — цикловой индекс группы G при этом действии на множестве N.

Теорема Пойа

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для случая тождественного действия группы G на множестве N, т.е. когда G является подгруппой $S(N)$.

Пусть $R(N, M) = \{f_1, \ldots, f_{m^n}\}$.

Для каждого элемента $g \in G$ построим соответствующее ему отображение Π_g:

$$\Pi_g = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_{m^n}(x) \\ f_1(\pi_g(x)) & f_2(\pi_g(x)) & \ldots & f_{m^n}(\pi_g(x)) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что для каждого $g \in G$ отображение Π_g является перестановкой.

Теорема Пойа

Предположим противное: пусть для некоторого $g \in G$ это не так. Т.е. найдутся такие $f_i, f_j \in R(N, M)$, $i \neq j$, что

$$f_i(\pi_g(x)) = f_j(\pi_g(x)).$$

Т.к. G — группа, найдется симметричный элемент $g' \in G$ к элементу $g \in G$. Значит,

$$f_i(\pi_g(\pi_{g'}(x))) = f_j(\pi_g(\pi_{g'}(x))).$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} f_i(\pi_g(\pi_{g'}(x))) &= f_i((\pi_g \circ \pi_{g'})(x))) = f_i(\pi_{g*g'}(x)) = \\ &= f_i(\pi_e(x)) = f_i(x), \\ f_j(\pi_g(\pi_{g'}(x))) &= f_j((\pi_g \circ \pi_{g'})(x))) = f_j(\pi_{g*g'}(x)) = \\ &= f_j(\pi_e(x)) = f_j(x). \end{aligned}$$

Т.е. $f_i(x) = f_j(x)$, чего не может быть.

Теорема Пойа

Поэтому для каждого $g \in G$ верно $\Pi_g \in S(R(N, M))$.

Положим
$$S_1 = \{\Pi_g \mid g \in G\}.$$

Проверим, что $G_1 = (S_1, \circ)$ является группой.

Свойства группы.
1) Ассоциативность операции $\circ$.
2) Существование нейтрального элемента: $\Pi_e \in G_1$, где e — нейтральный элемент в группе G.
3) Для каждого элемента $\Pi_g \in G_1$ существование обратного элемента: $\Pi_{g'} \in G_1$, где элемент g' симметричен к элементу g в группе G.

Теорема Пойа

Итак, $G_1 = (S_1, \circ)$ — подгруппа симметрической группы перестановок $S(R(N, M))$.

Рассмотрим **тождественное** действие группы G_1 на множестве $R(N, M)$.

Т.е. если $\Pi_g \in G_1$, где $g \in G$, и $f(x) \in R(N, M)$, то

$$\Pi_g(f(x)) = f(\pi_g(x)).$$

Теорема Пойа

Если $f_i, f_j \in R(N, M)$, то f_i и f_j эквивалентны по группе G_1, если найдется $\Pi_g \in G_1$, где $g \in G$, что

$$\Pi_g(f_i(x)) = f_j(x),$$

т.е.

$$f_j(x) = f_i(\pi_g(x)).$$

Но это означает, что раскраски f_i и f_j **эквивалентны по группе** G.

Значит,

$$f_i \sim_G f_j \;\Leftrightarrow\; f_i \sim_{G_1} f_j.$$

Теорема Пойа

Следовательно, число орбит $N(G; m)$ раскрасок элементов множества N в m цветов **совпадает** с числом орбит $N(G_1)$ элементов множества $R(N, M)$ по группе G_1, т.е.

$$N(G; m) = N(G_1).$$

По лемме Бернсайда

$$N(G_1) = \frac{1}{|G_1|} \sum_{g \in G} \lambda_1(\Pi_g).$$

Из $|G_1| = |G|$ находим:

$$N(G_1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda_1(\Pi_g).$$

Теорема Пойа

Лемма 1. *Для любой раскраски* $f(x) \in R(N, M)$ *равенство* $f(x) = f(\pi_g(x))$, *где* $g \in G$, *выполняется тогда и только тогда, когда для каждого цикла перестановки* π_g *все его элементы* **окрашены в один и тот же цвет** *раскраской* f.

Доказательство. 1. Пусть $f(x) = f(\pi_g(x))$.

Предположим противное: пусть найдутся такие $a, b \in N$, принадлежащие одному циклу перестановки π_g, что $f(a) \neq f(b)$. Можно считать, что $b = \pi_g(a)$.

Тогда

$$f(b) = f(\pi_g(a)) = f(a) \neq f(b).$$

Теорема Пойа

Лемма 1. *Для любой раскраски* $f(x) \in R(N, M)$ *равенство* $f(x) = f(\pi_g(x))$, *где* $g \in G$, *выполняется тогда и только тогда, когда все элементы каждого цикла перестановки* π_g **окрашены в один и тот же цвет** *раскраской* f.

Доказательство. 2. Пусть все элементы каждого цикла перестановки π_g окрашены в один и тот же цвет раскраской f.

Тогда если $a, b \in N$ из одного цикла перестановки π_g, то

$$f(b) = f(a).$$

Поэтому

$$f(x) = f(\pi_g(x)).$$

□

Теорема Пойа

Доказательство теоремы (продолжение). Итак,

$$\Pi_g = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_{m^n}(x) \\ f_1(\pi_g(x)) & f_2(\pi_g(x)) & \dots & f_{m^n}(\pi_g(x)) \end{pmatrix}.$$

Нам нужно подсчитать число $\lambda_1(\Pi_g)$, т.е. число неподвижных элементов перестановки Π_g, $g \in G$.

Т.е. нужно подсчитать число таких раскрасок $f(x)$, что

$$f(x) = f(\pi_g(x)).$$

Теорема Пойа

По лемме 1 равенство $f(x) = f(\pi_g(x))$ выполняется тогда и только тогда, когда все элементы каждого цикла перестановки π_g **окрашены в один и тот же цвет** раскраской f

Значит, для каждого из циклов перестановки π_g найдется только m возможностей окрасить его элементы.

Поэтому

$$\lambda_1(\Pi_g) = m^{\lambda_1(\pi_g)} \cdot m^{\lambda_2(\pi_g)} \cdot \ldots \cdot m^{\lambda_n(\pi_g)}.$$

Теорема Пойа

Следовательно,

$$N(G;m) = N(G_1) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m^{\lambda_1(\pi_g)}\cdot\ldots\cdot m^{\lambda_n(\pi_g)},$$

или

$$N(G;m) = Z_G(t_1 = m,\ldots,t_n = m).$$

$\square$

Пример: подсчет числа ожерелий

Пример. Найдем число различных ожерелий из 3-х бусин 2-х цветов. Т.е. найдем число орбит раскрасок в два цвета вершин правильного треугольника по группе H его вращений в плоскости. По теореме Пойа

$$N(H;2) = Z_H(t_1 = 2, t_2 = 2, t_3 = 2).$$

Напомним, что

$$Z_H(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3}(t_1^3 + 2t_3).$$

Тогда

$$N(H;2) = \frac{1}{3}(2^3 + 2 \cdot 2) = 4.$$

Какие раскраски определяют эти орбиты?
1) Все вершины красные; 2) две вершины красные, одна синяя;
3) одна вершина красная, две синие; 4) все вершины синие.

Пример: классификация функций алгебры логики

Пример. Найдем число таких различных функций алгебры логики, зависящих от 2-х переменных, что ни одна из них не может быть получена ни из какой другой навешиванием отрицаний над переменными.

Найдем цикловой индекс группы J_2:

N	x x_1x_2		$\pi_1(x)$ x_1x_2	$\pi_2(x)$ $x_1\bar{x}_2$	$\pi_3(x)$ $\bar{x}_1x_2$	$\pi_4(x)$ $\bar{x}_1\bar{x}_2$
1	00		00(1)	01(2)	10(3)	11(4)
2	01		01(2)	00(1)	11(4)	10(3)
3	10		10(3)	11(4)	00(1)	01(2)
4	11		11(4)	10(3)	01(2)	00(1)

Получаем, что $\lambda(\pi_1) = (4, 0, 0, 0)$, и $\lambda(\pi_i) = (0, 2, 0, 0)$ при $i = 2, 3, 4$.

Пример: классификиция функций алгебры логики

Следовательно,

$$Z_{J_2}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}(t_1^4 + 3t_2^2).$$

По теореме Пойа

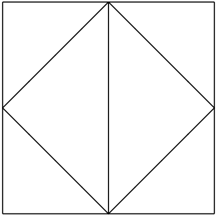
$$N(J_2; 2) = Z_{J_2}(2, 2, 2, 2) = \frac{1}{4}(2^4 + 3 \cdot 2^2) = 7.$$

Какие это функции? Здесь они перечислены:

$$0;\; 1;\; x_1;\; x_2;\; x_1x_2,\; x_1 \oplus x_2;\; x_1 \vee x_2.$$

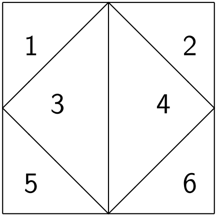
Пример: подсчет числа витрин

Пример. Найдем число раскрасок частей прозрачной витрины



в красный, синий и зеленый цвета, неэквивалентных относительно ее вращений в пространстве.

Пример: подсчет числа витрин



Найдем цикловой индекс группы G вращений этой витрины в пространстве.

$$\begin{array}{ll}
\pi_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6) & \lambda(\pi_1) = (6,0,0,0,0,0), \\
\pi_2 = (1,6)(2,5)(3,4) & \lambda(\pi_2) = (0,3,0,0,0,0), \\
\pi_3 = (1,2)(3,4)(5,6) & \lambda(\pi_3) = (0,3,0,0,0,0), \\
\pi_4 = (1,5)(2,6)(3)(4) & \lambda(\pi_4) = (2,2,0,0,0,0).
\end{array}$$

Значит, $Z_G(t_1,\ldots,t_6) = \frac{1}{4}(t_1^6 + 2t_2^3 + t_1^2 t_2^2)$.

Пример: подсчет числа витрин

По теореме Пойа

$$N(G;3) = Z_G(t_1 = 3, \dots, t_6 = 3).$$

Следовательно,

$$N(G;3) = \frac{1}{4} \cdot (3^6 + 2 \cdot 3^3 + 3^2 \cdot 3^2) = \frac{3^3}{4} \cdot (27 + 2 + 3) = 27 \cdot 8 = 216.$$

Отметим, что число всех раскрасок (без учета эквивалентности) частей этой витрины в 3 цвета равно $3^6 = 729$.

Задачи для самостоятельного решения

1. [2] Гл. VIII 4.9–4.10.

2. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из p бусин 2-х цветов, если p — простое число.

3. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из 6-ти бусин красного, синего и белого цветов.

4. По теореме Пойа найти число раскрасок граней правильного тетраэдра в синий, красный и зеленый цвета.

Литература к лекции

1. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 57–61.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. С. 273–275.

Конец лекции