Лекция 3. Существенные функции. Три леммы о существенных функциях. Критерий полноты Яблонского. Критерий полноты Слупецкого. Шефферовы функции.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Существенные функции

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, $k \geq 3$, называется **существенной**, если она *существенно* зависит не менее, чем от двух переменных.

Примеры. $x + y, x \cdot y, \max(x, y) \in P_k$.

Лемма о трех наборах

Лемма 1 (о трех наборах). *Пусть* $k \geq 3$. *Если* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ *— существенная функция, принимающая* l, $l \geq 3$, *значений причем (без ограничения общности рассуждений)* x_1 *и* x_2 *— ее существенные переменные, то найдутся 3 набора*

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in E_k^n, \\ \beta &= (b_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in E_k^n, \\ \gamma &= (a_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \in E_k^n, \end{aligned}$$

на которых функция f *принимает три различных значения.*

Лемма о трех наборах

Доказательство.
Т.к. x_1 — существенная переменная функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, найдутся такие значения $a_2, \ldots, a_n \in E_k$, что в последовательности

$$f(0, a_2, \ldots, a_n), f(1, a_2, \ldots, a_n), \ldots, f(k-1, a_2, \ldots, a_n)$$

встречаются не менее двух различных значений.

Лемма о трех наборах

Доказательство. Возможны два случая.

1. В этой последовательности встречаются **не все** различные значения функции f.

Т.е. найдется такой набор $\gamma = (a_1, c_2, \ldots, c_n) \in E_k^n$, что значение $f(\gamma)$ отлично от любого значения в этой последовательности.

Тогда пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n$.

Выберем такое значение $b_1 \in E_k$, чтобы для $\beta = (b_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n$ выполнялось неравенство $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Такое b_1 всегда можно найти.

Наборы α, β, γ — искомые.

Лемма о трех наборах

Доказательство.

2. В этой последовательности встречаются **все** различные значения функции f.

Т.к. x_2 — существенная переменная функции f, найдутся такие значения $a_1, c_3, \ldots, c_n \in E_k$, что

$$f(a_1, x_2, c_3, \ldots, c_n) \neq Const.$$

Т.е. найдется такое значение $c_2 \in E_k$, что для $\alpha = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in E_k^n$ и $\gamma = (a_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \in E_k^n$ верно $f(\alpha) \neq f(\gamma)$.

Тогда выберем такое значение $b_1 \in E_k$, чтобы для $\beta = (b_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n$ выполнялись неравенства

$$f(\alpha) \neq f(\beta) \text{ и } f(\gamma) \neq f(\beta).$$

Такое b_1 всегда можно найти.

Наборы α, β, γ — искомые. $\square$

Лемма о трех наборах

Пример. Рассмотрим существенную функцию $f(x, y) = x + y \in P_5$, принимающую 5 различных значений. Тогда искомые наборы, например, следующие:

$$\begin{aligned} \alpha &= (0, 0), \\ \beta &= (1, 0), \\ \gamma &= (0, 2). \end{aligned}$$

Проверим:

$$f(\alpha) = 0,$$
$$f(\beta) = 1,$$
$$f(\gamma) = 2.$$

Основная лемма

Лемма 2 (основная). *Пусть* $k \geq 3$. *Если* $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ *— существенная функция, принимающая* l, $l \geq 3$, *значений, то найдутся такие множества* G_i, $G_i \subseteq E_k$, $i = 1, \dots, n$, *что*
1) $|G_i| \leq l - 1$ *для каждого* $i = 1, \dots, n$;
2) на множестве $G_1 \times \dots \times G_n \subseteq E_k^n$ *функция* f *принимает все* l *своих различных значений.*

Основная лемма

Доказательство. Пусть (без ограничения общности рассуждений) x_1 и x_2 — существенные переменные функции f. Тогда по лемме 1 найдутся наборы

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n,$$
$$\beta = (b_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n,$$
$$\gamma = (a_1, c_2, \ldots, c_n) \in E_k^n,$$

на которых функция f принимает три различных значения. Пусть на наборах $\delta^{(j)} = (d_1^{(j)}, d_2^{(j)}, \ldots, d_n^{(j)}) \in E_k^n$, $j = 4, \ldots, l$, функция f принимет оставшиеся $(l-3)$ различные значения.

Основная лемма

Доказательство. Тогда

	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n	$f(x_1,\ldots,x_n)$
α	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n	z_1
β	b_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n	z_2
γ	a_1	c_2	c_3	$\ldots$	c_n	z_3
$\delta^{(4)}$	$d_1^{(4)}$	$d_2^{(4)}$	$d_3^{(4)}$	$\ldots$	$d_n^{(4)}$	z_4
$\ldots$				$\ldots$		$\ldots$
$\delta^{(l)}$	$d_1^{(l)}$	$d_2^{(l)}$	$d_3^{(l)}$	$\ldots$	$d_n^{(l)}$	z_l
	G_1	G_2	G_3	$\ldots$	G_n	

Т.е. множество G_i состоит из элементов столбца по переменной x_i, $i = 1,\ldots,n$.
Множества $G_1,\ldots,G_n$ — искомые. □

Основная лемма

Пример. Рассмотрим существенную функцию $f(x, y) = x + y \in P_5$, принимающую 5 различных значений. Тогда на следующих наборах:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (0, 0), \\ \alpha_1 &= (1, 0), \\ \alpha_2 &= (0, 2), \\ \alpha_3 &= (0, 3), \\ \alpha_4 &= (0, 4), \end{aligned}$$

функция $f(x, y) = x + y$ принимает 5 различных значений.

Лемма о квадрате

Четверку наборов вида

$$
\begin{aligned}
&(a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{b_i}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{b_j}, a_{j+1}, \dots, a_n),\\
&(a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{b_i}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{c_j}, a_{j+1}, \dots, a_n),\\
&(a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{c_i}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{b_j}, a_{j+1}, \dots, a_n),\\
&(a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{c_i}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{c_j}, a_{j+1}, \dots, a_n),
\end{aligned}
$$

назовем **квадратом**.

Лемма о квадрате

Лемма 3 (о квадрате). *Пусть* $k \geq 3$. *Если* $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ *— существенная функция, принимающая* l, $l \geq 3$, *значений, то найдется квадрат, на котором функция* f *какое-то свое значение принимает* **ровно** *в одной его точке.*

Лемма о квадрате

Доказательство. Пусть (без ограничения общности рассуждений) x_1 и x_2 — существенные переменные функции f. Тогда по лемме 1 найдутся наборы

$$\begin{aligned}\alpha &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n,\\ \beta &= (b_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n,\\ \gamma &= (a_1, c_2, \ldots, c_n) \in E_k^n,\end{aligned}$$

на которых функция f принимает три различных значения u, v и w соответственно.

Лемма о квадрате

Доказательство. Тогда рассмотрим последовательность квадратов:

Наборы		Значения f на них
$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$(b_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$
$(a_1, c_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$(b_1, c_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$
$(a_1, c_2, c_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$(b_1, c_2, c_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$	$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(a_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, a_n)$	$(b_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, a_n)$	$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$
$(a_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n)$	$(b_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n)$	$\{\mathbf{w}, ?\}$

Если искомый квадрат не был получен ранее, он обязательно появится на заключительном шаге. □

Лемма о квадрате

Пример. Рассмотрим существенную функцию $f(x,y) = x + y \in P_3$, принимающую 3 различных значения. Тогда на следующем квадрате:

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,2),\ (1,2)$$

функция $f(x,y) = x + y$ принимает значение 1 только в одной точке (на наборе $(1,0)$).

Критерий полноты Яблонского

Теорема 4 (С.В. Яблонского) *Пусть* $k \geq 3$, $A \subseteq P_k$ *и множество* A *содержит все функции одной переменной, принимающие не более* $(k-1)$ *значения.*
Тогда система A *полна в* P_k *в том и только в том случае, когда она содержит существенную функцию, принимающую все* k *значений.*

Критерий полноты Яблонского

Доказательство.
Необходимость. Пусть A — полная система.

1) Если она не содержит существенную функцию, то из системы A не получить никакую функцию с более, чем одной, существенной переменной.

2) Если в ней существенные функции, принимающие не все k значений, то из системы A не получить никакую функцию, принимающую все k значений.

Необходимость обоснована.

Критерий полноты Яблонского

Доказательство.
Достаточность. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$ — существенная функция, принимающая k значений.

Докажем, что произвольную функцию $g(y_1, \ldots, y_m) \in P_k$ можно построить формулой над функциями системы A.

Доказательство проведем индукцией по числу l, $l \leq k$, значений, которые принимает функция g.

Критерий полноты Яблонского

Доказательство.

Базис индукции: $l = 2$.

Пусть функция $g(y_1, \dots, y_m) \in P_k$ принимает 2 значения $s, t \in E_k$, $s < t$.

По лемме о квадрате для существенной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ найдется квадрат

$$\begin{array}{l}
(a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{b_i}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{b_j}, a_{j+1}, \dots, a_n), \\
(a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{b_i}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{c_j}, a_{j+1}, \dots, a_n), \\
(a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{c_i}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{b_j}, a_{j+1}, \dots, a_n), \\
(a_1, \dots, a_{i-1}, \mathbf{c_i}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, \mathbf{c_j}, a_{j+1}, \dots, a_n),
\end{array}$$

на котором функция f некоторое свое значение u принимает ровно в одной точке, например, в точке (b_i, b_j).

Т.к. система A содержит все константы, построим функцию

$$\varphi(x_i, x_j) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Критерий полноты Яблонского

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\psi_1(z) = \begin{cases} b_i, & z = s, \\ c_i, & z = t, \end{cases} ; \ \psi_2(z) = \begin{cases} b_j, & z = s, \\ c_j, & z = t, \end{cases}$$

и

$$\psi_0(z) = \begin{cases} s, & z = u, \\ t, & z \neq u. \end{cases}$$

Отметим, что $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \in A$.
Тогда можно построить функцию максимума из элементов s, t:

$$max^{s,t}(x, y) = \psi_0(\varphi(\psi_1(x), \psi_2(y))).$$

Аналогично можно построить функцию минимума из элементов s, t: $min^{s,t}(x, y)$.

Критерий полноты Яблонского

Доказательство. Отметим, что для функций

$$j_i^{s,t}(z) = \begin{cases} t, & z = i, \\ s, & z \neq i. \end{cases}$$

верно $j_i^{s,t} \in A$, $i \in E_k$.
Тогда аналогично 1-й форме получаем:

$$g(y_1, \ldots, y_m) = \max_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)\in E_k^m}{}^{s,t} \min{}^{s,t}(j_{\sigma_1}^{s,t}(x_1), \ldots, j_{\sigma_m}^{s,t}(x_m), g(\sigma)).$$

Базис индукции обоснован.

Критерий полноты Яблонского

Индуктивный переход. Пусть все функции из P_k, принимающие не более $(l-1)$ значения, уже построены.
Рассмотрим функцию $g(y_1, \dots, y_m) \in P_k$, принимающую ровно l значений: $s_1, \dots, s_l$.
По основной лемме для существенной функции $f(x_1, \dots, x_n)$, принимающей l значений, найдутся такие множества G_i, что $|G_i| \leq l-1$ и на множестве $G_1 \times \dots \times G_n$ функция f принимает l различных значений.
Если $l < k$, то при необходимости дополнительной функцией $\psi(z) \in A$ переведем эти значения в $s_1, \dots, s_l$.
Пусть

$$f(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}) = s_j, \ j = 1, \dots, l,$$

где $(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}) \in G_1 \times \dots \times G_n$.

Критерий полноты Яблонского

Положим
$$\psi_i(b_1, \dots, b_m) = a_i^{(j)},$$
если $g(b_1, \dots, b_m) = s_j$, $i = 1, \dots, n$.
Заметим, что $\psi_1, \dots, \psi_n$ уже построены.
Тогда

$$g(y_1, \dots, y_m) = f(\psi_1(y_1, \dots, y_m), \dots, \psi_n(y_1, \dots, y_m)).$$

В самом деле, если $\beta \in E_k^m$ и $g(\beta) = s_j$, то

$$s_j = g(\beta) = f(\psi_1(\beta), \dots, \psi_n(\beta)) = f(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}) = s_j.$$

Индуктивный переход обоснован.

$\square$

Критерий полноты Слупецкого

Теорема 5 (Слупецкого). *Пусть* $k \geq 3$, $A \subseteq P_k$ *и множество* A *содержит все функции одной переменной.*
Тогда система A *полна в* P_k *в том и только в том случае, когда она содержит существенную функцию, принимающую все* k *значений.*

Верен ли критерий полноты в P_2?

Верны ли эти критерии полноты в P_2?
Нет. Рассмотрим множество

$$A = \{0, 1, x, \bar{x}, x \oplus y\} \subseteq P_2.$$

Система A содержит все функции одной переменной и существенную функцию $x \oplus y$, принимающую два значения. Но система A не является полной в P_2, так как $A \subseteq L$.

Полнота системы $\{j_0(x), x+y\}$ в P_k при $k \geq 3$

Пример. Докажем по критерию, что система $A = \{j_0(x), x+y\}$ — полна в P_k при $k \geq 3$.

1. Покажем, что из системы A можно получить все функции одной переменной.
В самом деле, $\underbrace{x + \ldots + x}_{k} = 0$, $j_0(0) = 1$, $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$ и т.д. — все константы построены.
Теперь $x - a = x + (k - a)$, где $a \in E_k$, и $j_a(x) = j_0(x - a)$.
Тогда запишем произвольную функцию $f(x) \in P_k^{(1)}$ во 2-й форме и получим:

$$f(x) = \sum_{a \in E_k} f(a) j_a(x) = \sum_{a \in E_k} \underbrace{j_a(x) + \ldots + j_a(x)}_{f(a)}.$$

Все функции одной переменной построены.

Полнота системы $\{j_0(x), x+y\}$ в P_k при $k \geq 3$

Пример (продолжение).

2. Теперь заметим, что $x + y \in A$ — существенная функция, принимающая все k значений.
Значит, система $A = \{j_0(x), x+y\}$ — полна в P_k при $k \geq 3$.

При $k = 2$ система $\{j_0(x) = \bar{x}, x + y = x \oplus y\} \subseteq L$ — неполна.

Шефферова функция

Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ называется **шефферовой**, если $[\{f\}] = P_k$.

Примеры. Штрих Шеффера $x/y \in P_2$, стрелка Пирса $x \downarrow y \in P_2$, функция Вебба $V_k(x, y) \in P_k$.

Шефферовы функции

Теорема 6 (критерий шефферовости функции). *Пусть* $k \geq 3$ *и* $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$.
Функция f *является шефферовой в* P_k *тогда и только тогда, когда формулами над ней можно выразить все функции одной переменной, принимающие не более* $(k-1)$ *значения.*
Доказательство.
Необходимость очевидна.

Шефферовы функции

Доказательство.
Докажем *достаточность*.
1) Если функция f не принимает какое-то значение $v \in E_k$, то из нее нельзя получить константу v — противоречие. Значит, функция f принимает все k значений.
2) Если функция f не является существенной, то по п. 1) она — перестановка, и из нее можно получить только перестановки — противоречие. Значит, функция f — существенная.
Тогда по критерию полноты Яблонского система $A = \{f\}$ — полна в P_k. $\square$

Верен ли критерий шефферовости функции в P_2?

Верен ли этот критерий шефферовости функции в P_2?

Верен ли критерий шефферовости функции в P_2?

Да. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ и из f формулами можно выразить константы 0 и 1. Проверим, что $f \notin T_0, T_1, L, S, M$.

Получаем:
1) $f \notin T_0$, т.к. из нее формулами можно получить $1 \notin T_0$, а T_0 — замкнутый класс;
2) $f \notin T_1$, т.к. из нее формулами можно получить $0 \notin T_1$, а T_1 — замкнутый класс;
3) $f \notin S$, т.к. из нее формулами можно получить $0 \notin S$, а S — замкнутый класс;
4) $f \notin M$, т.к. $f \notin T_0$, $f \notin T_1$;
5) $f \notin L$, т.к. если предположить, что $f \in L$, то из $f \notin T_0$ и $f \notin T_1$ будет следовать $f \in S$, что противоречит $f \notin S$.

Значит, по теореме Поста система $\{f\}$ — полна в P_2, т.е. f — шефферова функция.

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. I, гл. 2, стр. 56–65.

Конец лекции