Лекция 11. Вероятностный метод. Локальная лемма Ловаса. Примеры применения

Лектор — Нагорный Александр Степанович
anagorny@list.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Локальная лемма Ловаса (формулировка)

Определение 1. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – события в произвольном вероятностном пространстве. Ориентированный граф $D = (V, E)$ на множестве вершин $V = \{1,2, \dots, n\}$ называется **орграфом зависимости** для событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, если для всякого i, $1 \le i \le n$, каждое событие A_i взаимно независимо с событиями $\{A_j : (i,j) \notin E\}$.

Лемма 1 ([2] локальная лемма: общий случай) Предположим, что $D = (V, E)$ является орграфом зависимости для событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, и пусть существуют действительные числа $x_1, \dots, x_n$, такие, что $0 \le x_i < 1$ и $\Pr[A_i] \le x_i \prod_{(i,j)\in E}(1 - x_j)$ для всех $1 \le i \le n$. Тогда $\Pr\left[\bigwedge_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right] \ge \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$. В частности, с положительной вероятностью ни одно из событий A_i не происходит.

Локальная лемма Ловаса: симметричный случай (формулировка)

Следствие 1 (локальная лемма: симметричный случай). Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – события в произвольном вероятностном пространстве. Пусть каждое событие A_i взаимно независимо со всеми событиями, за исключением тех не более чем d событий A_j, для которых $\Pr[A_i|A_j] \leq p$ при всех $1 \leq i \leq n$. Если

$$ep(d+1) \leq 1,$$

то $\Pr\left[\bigwedge_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right] > 0$.

Лемма Ловаса (общий и симметричный случаи) были доказаны на предыдущей лекции. А сейчас мы приведём в качестве примеров несколько результатов, для доказательства которых лемма Ловаса применяется.

Свойство B

Напомним определения.

Определение 2. Пара $H = (V, E)$, где V — конечное множество, элементы которого называются **вершинами**, а E — некоторое семейство подмножеств множества V, называемых **рёбрами**, называется **гиперграфом**.

Определение 3. Будем говорить, что гиперграф $H = (V, E)$ **обладает свойством** B (т. е., **является 2-раскрашиваемым**), если существует раскраска множества V в два цвета, при которой никакое ребро $f \in E$ не является монохроматическим.

Определение 4. Гиперграф называется $\boldsymbol{n}$**-однородным**, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Свойство B

Теорема 1. Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф, в котором каждое ребро содержит по меньшей мере k элементов и каждое ребро пересекается не более чем с d другими рёбрами. Если $e(d+1) \leq 2^{k-1}$, то H обладает свойством B.

Доказательство. Раскрасим каждую вершину $v \in V$ случайно и независимо либо синим, либо красным цветом с равной вероятностью. Для каждого ребра $f \in E$ рассмотрим событие $A_f = \{f \text{ является монохроматическим}\}$. Легко видеть, что $\Pr[A_f] = 2/2^{|f|} \leq 1/2^{k-1}$. Кроме того, каждое событие A_f не зависит от событий $A_{f'}$, соответствующих тем рёбрам f', которые не пересекаются с f. Теперь результат вытекает из следствия 1. ■

Свойство B

Следствие 2. При $k \geq 9$ любой k – однородный гиперграф, каждая вершина которого инцидентна ровно k рёбрам, обладает свойством B.

Доказательство. Любое ребро f такого гиперграфа H содержит ровно k вершин, каждая из которых инцидентна ровно k рёбрам (включая f). Поэтому ребро f (как и каждое другое ребро гиперграфа) пересекает не более $d = k(k-1)$ других рёбер. Требуемый результат вытекает отсюда, поскольку неравенство $e(k(k-1)+1) < 2^{k-1}$ выполняется для каждого $k \geq 9$. ■

Разноцветные множества действительных чисел

Определение 5. Пусть даны k – раскраска $c : \mathbb{R} \to \{1,2, \dots, k\}$ действительных чисел в цвета $1,2, \dots, k$ и подмножество $X \subset \mathbb{R}$. Будем говорить, что X **разноцветно** (относительно c), если $c(X) = \{1,2, \dots, k\}$, т. е., X содержит элементы всех цветов.

Теорема 2. Пусть m и k — два натуральных числа, удовлетворяющих условию

$$e(m(m-1)+1)k\left(1-\frac{1}{k}\right)^m \leq 1. \qquad (1)$$

Тогда для любого множества S из m действительных чисел существует k -раскраска, такая, что каждый сдвиг $x + S$ (для $x \in \mathbb{R}$) является разноцветным.

Замечание 1. При $m > \big(3 + o(1)\big)k \log k$ неравенство (1) верно.

Разноцветные множества действительных чисел

Доказательство. 1. В случае, если X является **конечным** подмножеством $\mathbb{R}$, существование разноцветной k – раскраски является простым следствием локальной леммы. В самом деле, положим $Y = \bigcup_{x \in X}(x + S)$ и пусть $c : Y \to \{1,2, \dots, k\}$ – случайная k – раскраска множества Y, полученная выбором для каждого $y \in Y$,случайно и независимо, $c(y) \in \{1,2, \dots, k\}$ в соответствии с равномерным распределением на множестве $\{1,2, \dots, k\}$. Для каждого $x \in X$ рассмотрим событие $A_x =$ «$x + S$ **не является разноцветным (относительно** c **)»**. Ясно, что $\Pr[A_x] \leq k\left(1 - \frac{1}{k}\right)^m$. Кроме того, каждое событие A_x является взаимно независимым со всеми другими событиями $A_{x'}$ кроме тех, для которых $(x + S) \cap (x' + S) \neq \emptyset$.

Разноцветные множества действительных чисел

Доказательство (продолжение). Поскольку существует не более $m(m-1)$ таких событий, требуемый результат вытекает из следствия 1.

2. Рассмотрим теперь случай, когда мощность X **не является конечной**. Дискретное пространство с k точками является компактом. Теорема Тихонова (эквивалентная аксиоме выбора) утверждает, что произвольное произведение таких пространств также является компактом. В частности, пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\{1,2,\dots,k\}$ с обычной топологией произведения, является компактом. В этом пространстве для каждого фиксированного $x \in \mathbb{R}$ множество C_x всех раскрасок c таких, что $x+S$ является разноцветным, замкнуто.

Разноцветные множества действительных чисел

Доказательство (окончание). Как доказано выше (в п. **1.**), пересечение конечного числа множеств C_x не является пустым. Отсюда следует, ввиду компактности, что пересечение всех множеств C_x не пусто. Любая раскраска этого пересечения обладает свойствами из утверждения теоремы 2. ■

Замечание 2. В общем случае, невозможно применить локальную лемму к бесконечному множеству событий и сделать заключение о том, что в некоторой точке вероятностного пространства ни одно из них не выполняется. В самом деле, существуют тривиальные примеры счётного множества взаимно независимых событий A_i, удовлетворяющих условиям $\Pr[A_i] = 1/2$ и $\bigwedge_{i\geq 1} \overline{A}_i = \emptyset$. Поэтому соображения компактности в предыдущем доказательстве являются существенными.

Нижние оценки для диагональных чисел Рамсея

Теорема 3. Если $e\left(\binom{k}{2}\binom{n}{k-2}+1\right)\cdot 2^{1-\binom{k}{2}}<1$, то $R(k,k)>n$.

Доказательство. Рассмотрим случайную 2-раскраску рёбер графа K_n (как обычно, все рёбра красим независимо и каждый из двух цветов выбираем равновероятно). Для каждого множества S из k вершин графа K_n рассмотрим событие $A_S =$ **«полный граф на множестве S является монохроматическим».** Ясно, что $\Pr[A_S]=2^{1-\binom{k}{2}}$. Очевидно, что каждое событие A_S является взаимно независимым со всеми другими событиями A_T кроме тех, для которых $|S\cap T|\geq 2$, поскольку только в этом случае соответствующие полные подграфы имеют общее ребро. Значит, можно применить следствие 1 с $p=2^{1-\binom{k}{2}}$ и $d=\binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$. ■

Нижние оценки для диагональных чисел Рамсея

Следствие 3. $R(k,k) > \frac{\sqrt{2}}{e}\big(1+o(1)\big)k2^{k/2},\ k \to \infty.$

Замечание 3. Это всего лишь в два раза лучше оценки, полученной Эрдёшем прямым вероятностным методом ещё в 1947 г. Хотя столь небольшое улучшение несколько разочаровывает, это не удивительно. Как мы уже отмечали, локальная лемма наиболее эффективна, когда зависимости между событиями редки, а в данном случае это не так. В самом деле, существует всего $K = \binom{n}{k}$ рассматриваемых событий, а максимальная степень исхода d в орграфе зависимости равна приблизительно $\binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$. Для больших k и много бóльших n (что как раз и представляет для нас интерес) мы имеем $d > K^{1-o(1/k)}$, т. е. массу зависимостей.

Нижние оценки для внедиагональных чисел Рамсея

Замечание 3 (продолжение). С другой стороны, если мы рассмотрим малые множества S, например, множества размера 3, то увидим, что их всего $K = \binom{n}{3}$, и каждое из них имеет общее ребро только с $3(n-3) \approx K^{1/3}$ множествами размера 3. Это подсказывает, что локальная лемма может дать больше для улучшения оценок внедиагональных чисел Рамсея $R(k,l)$, особенно если один из параметров, скажем l, мал.

Теорема 4 ([3] Spencer, 1977). Существует константа $c > 0$ такая, что

$$R(k,3) > ck^2/\log^2 k\,.$$

Нижние оценки для внедиагональных чисел Рамсея

Доказательство. Раскрасим рёбра графа K_n в два цвета случайно, независимо и так, что каждое ребро окрашивается в синий цвет с вероятностью p. Для каждого множества из трёх вершин T рассмотрим событие $A_T =$ **«треугольник на множестве** T **синий»**. Аналогично, для каждого множества S из k вершин рассмотрим событие $B_S =$ **«полный граф на множестве** S **красный»**. Вероятности событий $\Pr[A_T] = p^3$ и $\Pr[B_S] = (1-p)^{\binom{k}{2}}$. Построим орграф зависимости для событий A_T и B_S путём соединения двух вершин дугами (в обоих направлениях) тогда и только тогда, когда соответствующие графы имеют общее ребро. Ясно, что каждая вершина A_T орграфа зависимости смежна с $3(n-3) < 3n$ вершинами $A_{T'}$ и не более чем с $\binom{n}{k}$ вершинами $B_{S'}$.

Нижние оценки для внедиагональных чисел Рамсея

Доказательство (продолжение). Аналогично, каждая вершина B_S орграфа зависимости смежна с $\binom{k}{2}(n-k) < k^2 n/2$ вершинами $A_{T'}$ и не более чем с $\binom{n}{k}$ вершинами $B_{S'}$. Как вытекает из общего случая локальной леммы Ловаса, если мы сможем найти $0 < p < 1$ и два действительных числа $0 \le x < 1$ и $0 \le y < 1$, таких, что

$$\mathrm{p}^3 \le x(1-x)^{3n}(1-y)^{\binom{n}{k}}$$

и

$$(1-\mathrm{p})^{\binom{k}{2}} \le y(1-x)^{\frac{k^2 n}{2}}(1-y)^{\binom{n}{k}},$$

то $R(k,3) > n$.

Нижние оценки для внедиагональных чисел Рамсея

Доказательство (окончание). Наша цель — найти наибольшее возможное $k = k(n)$, для которого существуют такие числа p, x и y. Элементарное (но утомительное) вычисление показывает, что наилучшим является выбор, при котором $k = c_1 n^{1/2} \log n$, $p = c_2 n^{-1/2}$, $x = c_3 n^{-3/2}$, и $y = c_4 \exp(-n^{1/2} \log^2 n)$. Это как раз даёт нужную нижнюю оценку $R(k, 3) > ck^2 / \log^2 k$. ■

Совершенно аналогично доказывается оценка для $R(k, 4)$.

Теорема 5. $R(k, 4) > k^{5/2+o(1)}$, $k \to \infty$.

Замечание 4. Данная оценка для $R(k, 4)$ лучше, чем любая известная из тех, что получены без применения локальной леммы.

Латинские трансверсали

Обсуждая доказательство локальной леммы, мы заметили, что предположение о взаимной независимости может быть заменено более слабым предположением о достаточно малой условной вероятности каждого события, при условии взаимной «невстречаемости» произвольного множества событий, каждое из которых несмежно с ним в орграфе зависимости. Теперь мы покажем, как эта модифицированная версия леммы была применена в статье Эрдёша и Спенсера **[4]**.

Определение 6. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $n \times n$ из целых чисел. Перестановка π называется **латинской трансверсалью** (для A) если все элементы $a_{i\pi(i)}$ различны между собой.

Латинские трансверсали

Теорема 6 ([4] Erdós P. and Spencer J.H., 1991).
Пусть $k \leq (n-1)/(4e)$ и никакое целое число не встречается в качестве элемента матрицы A более k раз. Тогда A обладает латинской трансверсалью.

Доказательство. Пусть π — случайная перестановка на множестве $\{1,2,\dots,n\}$, выбранная в соответствии с равномерным распределением из всех возможных $n!$ перестановок. Обозначим через T множество всех упорядоченных четвёрок (i,j,i',j') таких, что $i < i', j \neq j'$ и $a_{ij} = a_{i'j'}$. Для каждой $(i,j,i',j') \in T$ пусть $A_{iji'j'}$ означает событие «$\pi(i) = j$ и $\pi(i') = j'$». Существование латинской трансверсали эквивалентно утверждению, что с положительной вероятностью ни одно из этих событий не происходит.

Латинские трансверсали

Доказательство (продолжение). Определим симметричный орграф (т.е. просто граф) G на вершинах множества T, полагая, что вершина (i,j,i',j') смежна с (p,q,p',q') тогда и только тогда, когда либо $\{i,i'\}\cap\{p,p'\}\neq\emptyset$, либо $\{j,j'\}\cap\{q,q'\}\neq\emptyset$. Таким образом, эти две четвёрки не смежны тогда и только тогда, когда четыре клетки (i,j), (i',j'), (p,q) и (p',q') встречаются в четырёх различных строках и в четырёх различных столбцах матрицы A.

Максимальная степень графа G меньше $4nk$. В самом деле, для данной четвёрки $(i,j,i',j')\in T$ существует не более $4n$ способов выбрать пару (s,t) такую, что или $s\in\{i,i'\}$, или $t\in\{j,j'\}$, и для каждой пары (s,t) существует не более k способов выбора $(s',t')\neq(s,t)$ с $a_{st}=a_{s't'}$. Всякая четвёрка (s,t,s',t') может быть однозначно представлена в виде (p,q,p',q') при $p<p'$.

Латинские трансверсали

Доказательство (продолжение). Поскольку $e \cdot 4nk \cdot \frac{1}{n(n-1)} \leq 1$, требуемый результат вытекает из упомянутого выше усиления симметричной версии локальной леммы, если мы покажем, что

$$\Pr\left[A_{iji'j'} \middle| \bigwedge_S \overline{A}_{pqp'q'}\right] \leq \frac{1}{n(n-1)} \qquad (2)$$

для любой четвёрки (i, j, i', j') и любого множества S элементов множества T, не смежных в G с (i, j, i', j').

В силу симметрии, можно считать, что $i = j = 1$, $i' = j' = 2$, и что, следовательно, ни одна из p или q не равна ни 1, ни 2. Назовём перестановку π **хорошей**, если $\bigwedge_S \overline{A}_{pqp'q'}$. Пусть S_{ij} обозначает множество всех хороших перестановок π, удовлетворяющих условию $\pi(1) = i$ и $\pi(2) = j$.

Латинские трансверсали

Доказательство (продолжение).

Мы утверждаем, что $|S_{12}| \leq |S_{ij}|$ для всех $i \neq j$. В самом деле, предположим сначала, что $i, j > 2$. Для каждой хорошей $\pi \in S_{12}$ определим перестановку π^* следующим образом. Предположим, что $\pi(x) = i$ и $\pi(y) = j$. Тогда определим $\pi^*(1) = i, \pi^*(2) = j, \pi^*(x) = 1, \pi^*(y) = 2$ и $\pi^*(t) = \pi(t)$ для всех $t \neq 1,2, x, y$. Можно легко проверить, что π^* – хорошая, так как ни одна из пар $(1, i), (2, j), (x, 1)$ и $(y, 2)$ не является частью ни одной $(p, q, p', q') \in S$. Поэтому $\pi^* \in S_{ij}$, и так как отображение $\pi \to \pi^*$ инъективно, то $|S_{12}| \leq |S_{ij}|$, как и обещано. Аналогично можно определить инъективное отображение, показывающее, что $|S_{12}| \leq |S_{ij}|$, даже когда $\{i, j\} \cap \{1, 2\} \neq \emptyset$.

Латинские трансверсали

Доказательство (окончание).

Отсюда следует, что

$$\Pr\left[A_{1122} \middle| \bigwedge_S \overline{A}_{pqp'q'}\right] \leq \Pr\left[A_{1i2j} \middle| \bigwedge_S \overline{A}_{pqp'q'}\right]$$

для всех $i \neq j$, а значит,

$$\Pr\left[A_{1122} \middle| \bigwedge_S \overline{A}_{pqp'q'}\right] \leq \frac{1}{n(n-1)}.$$

В силу симметрии отсюда следует неравенство (2). Тем самым, доказательство завершено . ■

Вместо заключения

Мы рассмотрели различные применения локальной леммы Ловаса для получения комбинаторных результатов. Доказательства этих результатов, не использующие локальную лемму, не известны.

Литература к лекции

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007, с. 83-89, 95-96, 100.
2. Erdós P. and Lovász L. (1975) Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, *in Infinite and Finite Sets* (A. Hajnal et al., eds.), Noth-Holland, Amsterdam, pp. 609-628.
3. Spencer J.H. (1977) Asymptotic lower bounds for Ramsey functions // *Disc. Math.* **20:** pp. 69-76.
4. Erdós P. and Spencer J.H. (1991) Lopsided Lovász local lemma and latin transversals // *Disc. Appl. Math.* ***3*0:** pp. 151-154.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!