Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

Элементы теории синтеза и надёжности дискретных управляющих систем

Москва — 2019

Оглавление

1 Асимптотически наилучшие методы синтеза схем в некоторых моделях дискретных управляющих систем **3**

§1 Формулы и СФЭ в произвольном базисе, функционалы их сложности. Верхние оценки числа формул и СФЭ 3

§2 Некоторые модификации контактных схем, итеративные контактные схемы. Верхние оценки числа схем контактного типа 6

§3 Нижние мощностные оценки функций Шеннона 8

§4 Универсальные множества ФАЛ и их построение. Асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ и ИКС в произвольном базисе 11

§5 Асимптотически наилучший метод синтеза формул и контактных схем в произвольном базисе 15

§6 Поведение функции Шеннона для задержки ФАЛ в произвольном базисе. Синтез СФЭ асимптотически оптимальных как по сложности, так и по задержке для почти всех ФАЛ 21

2 Некоторые вопросы надёжности схем из функциональных элементов **25**

§7 Оценка надёжности схем. Асимптотически наилучший метод синтеза сколь угодно надёжных СФЭ в базисе из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования 25

§8 Самокорректирующиеся СФЭ в базисах из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования, асимптотически наилучшие методы их синтеза 32

Литература **38**

Глава 1

Асимптотически наилучшие методы синтеза схем в некоторых моделях дискретных управляющих систем

§1 Формулы и СФЭ в произвольном базисе, функционалы их сложности. Верхние оценки числа формул и СФЭ

Продолжим начатое в [3, Гл. 2, 4] изучение формул и схем из функциональных элементов (СФЭ) над произвольным конечным полным базисом Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где функциональный элемент (ФЭ) $\mathcal{E}_i$ реализует ФАЛ $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$, которая в случае $k_i \geqslant 2$ существенно зависит от всех своих переменных.

Будем по-прежнему (ср. [3, Гл. 2, §3]) представлять СФЭ Σ в виде $\Sigma = \Sigma(x;\, z)$, если $x = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $z = (z_{j_1}, \ldots, z_{j_n})$ — наборы, составленные из всех её различных входных и выходных булевых переменных (БП), перечисленных в порядке возрастания их номеров в алфавитах $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots\}$, соответственно. Сложность, то есть число ФЭ, глубину, то есть максимальное число последовательно соединённых ФЭ, и ранг, то есть число дуг, исходящих из входов, в схеме Σ, следуя [3], будем обозначать через $L(\Sigma)$, $D(\Sigma)$ и $R(\Sigma)$ соответственно.

Введём теперь «взвешенные» функционалы сложности и глубины СФЭ. Будем считать, что каждому функциональному элементу $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, сопоставлены положительные действительные числа $\mathcal{L}_i$ и T_i, называемые его «весом» и «задержкой», которые характеризуют сложность («размер») и время срабатывания $\mathcal{E}_i$ соответственно. Предполагается, что «вес» и «задержка» любого ФЭ стандартного базиса Б$_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ равны 1. Если (v_0, v_t)-цепь C длины t в СФЭ Σ проходит через вершины $v_1, \ldots, v_{t-1}$, и вершине v_j, $j = 1, \ldots, t$, при этом соответствует ФЭ $\mathcal{E}_{i_j}$ базиса Б, то число $T(C) = T_{i_1} + \cdots + T_{i_t}$ будем называть *задержкой* этой цепи.

По аналогии с глубиной определим *задержку* вершины v СФЭ Σ как максимальную задержку тех цепей Σ, которые начинаются в одной из ее входных вершин и заканчиваются в вершине v. Для каждой СФЭ Σ над базисом Б помимо сложности $L(\Sigma)$, глубины $D(\Sigma)$ и ранга $R(\Sigma)$ определим следующие параметры (функционалы сложности):

1) $\mathcal{L}(\Sigma)$ — *размер* Σ, то есть сумма «весов» всех её ФЭ;

2) $T(\Sigma)$ — *задержка* Σ, то есть максимальная задержка её вершин.

Заметим, что функционал L (D) является частным случаем функционала $\mathcal{L}$ (соответственно T), когда веса (соответственно задержки) всех ФЭ базиса Б равны 1. Введем также

«частичный» размер $\mathcal{L}_{\text{Б}'}(\Sigma)$ (задержку $T_{\text{Б}'}(\Sigma)$), который равен сумме весов ФЭ Σ типа $\mathcal{E}_i$, где $\mathcal{E}_i \in \text{Б}'$, в СФЭ Σ (соответственно максимальной сумме задержек ФЭ указанного вида, лежащих на одной цепи Σ). Аналогичным образом вводится «частичная» сложность $L_{\text{Б}'}(\Sigma)$ и «частичная» глубина $D_{\text{Б}'}(\Sigma)$ для СФЭ Σ.

Напомним (см. [3]), что СФЭ называется *приведённой*, если выход любого её ФЭ, не являющийся выходом схемы, поступает на вход другого ФЭ этой схемы. Приведённая СФЭ (системы формул) считается *строго приведённой*, если в ней нет эквивалентных вершин, то есть вершин, в которых реализуются равные ФАЛ (соответственно нет эквивалентных вершин, лежащих на одно цепи). Заметим, что для любой СФЭ (системы формул) Σ существует эквивалентная ей строго приведённая СФЭ (соответственно система формул) Σ', для которой

$$\mathcal{L}_{\text{Б}'}(\Sigma') \leqslant \mathcal{L}_{\text{Б}'}(\Sigma) \quad \text{и} \quad T_{\text{Б}'}(\Sigma') \leqslant T_{\text{Б}'}(\Sigma)$$

при любом $\text{Б}' \subseteq \text{Б}$. Легко видеть также, что в строго приведённой формуле или СФЭ нет трёх или более последовательно соединённых одновходовых ФЭ.

Для базиса $\text{Б} = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$ положим $\widehat{\text{Б}} = \{\, \mathcal{E}_i \mid k_i \geqslant 2 \,\}$ и заметим, что множество $\widehat{\text{Б}}$ не пусто в силу полноты базиса Б. Для ФЭ $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_i \in \widehat{\text{Б}}$, определим его *приведённый вес* ρ_i и *приведённую задержку* τ_i следующим образом:

$$\rho_i = \frac{\mathcal{L}_i}{k_i - 1}, \qquad \tau_i = \frac{T_i}{\log k_i}.$$

Введём, далее, величины

$$\rho_{\text{Б}} = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{\text{Б}}} \rho_i \quad \text{и} \quad \tau_{\text{Б}} = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{\text{Б}}} \tau_i,$$

которые назовём *приведённым весом* и *приведённой задержкой базиса* Б соответственно. Для стандартного базиса $\text{Б}_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, очевидно, $\widehat{\text{Б}}_0 = \{\&, \vee\}$, $\rho_{\text{Б}_0} = \tau_{\text{Б}_0} = 1$. Для функционала сложности ψ типа L, $\mathcal{L}$, D, T через $\widehat{\psi}(\Sigma)$ будем обозначать величину $\psi_{\widehat{\text{Б}}}(\Sigma)$.

Следуя [3] обозначим через $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{УС}}$ и $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ множество СФЭ над базисом Б, множество усилительных СФЭ над Б и множество формул над Б соответственно. При этом для каждого A, $A \in \{\text{С}, \Phi\}$, определим размер $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(F)$ ФАЛ или системы ФАЛ F в классе $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}$ и её задержку $T_{\text{Б}}(F)$ обычным образом, а через $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(n)$ и $T_{\text{Б}}(n)$ обозначим соответствующие функции Шеннона.

Лемма 1.1. *Для любой формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, выполняются неравенства*

$$R(\mathcal{F}) \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1, \qquad R(\mathcal{F}) \leqslant 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{\text{Б}}}}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть для каждого i, $i = 1, \ldots, b$, формула $\mathcal{F}$ содержит s_i ФЭ $\mathcal{E}_i$. При этом для числа ребер квазидерева $\mathcal{F}$ будут выполняться равенства

$$|E(\mathcal{F})| = \sum_{i=1}^{b} s_i \cdot k_i = R(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^{b} s_i - 1.$$

Следовательно,

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{b} s_i(k_i - 1) + 1 = \sum_{k_i \geqslant 2} \frac{k_i - 1}{\mathcal{L}_i} \cdot \mathcal{L}_i s_i + 1 \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \sum_{k_i \geqslant 2} \mathcal{L}_i s_i + 1 = \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1$$

и первое неравенство (1.1) доказано.

Второе неравенство (1.1) доказывается индукцией по $D(\mathcal{F})$. Действительно, при $D(\mathcal{F}) = 0$, когда $\mathcal{F} = x_j$, оно, очевидно, выполняется. Пусть теперь второе неравенство (1.1) верно для любой формулы глубины меньше, чем d, и пусть $\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i})$, где $D(\mathcal{F}) = d$ и $D(\mathcal{F}_j) < d$, $\widehat{T}(\mathcal{F}_j) = t_j$ при всех $j = 1, \ldots, k_i$. Тогда

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{k_i} R(\mathcal{F}_j) \leqslant k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{\text{Б}}}},$$

где $t = \max_{1 \leqslant j \leqslant k_i} t_j$. Следовательно, при $k_i = 1$ формула $\mathcal{F}$ удовлетворяет второму неравенству (1.1), так как в этом случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t$. При $k_i \geqslant 2$ в соответствии с определением $\tau_{\text{Б}}$ выполняется неравенство

$$k_i \leqslant 2^{\frac{T_i}{\tau_{\text{Б}}}},$$

используя которое и учитывая, что в данном случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t + T_i$, получим

$$R(\mathcal{F}) \leqslant k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{\text{Б}}}} \leqslant 2^{\frac{t + T_i}{\tau_{\text{Б}}}} = 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{\text{Б}}}}.$$

Лемма доказана. □

Замечание. Аналогично первому неравенству (1.1) доказывается, что число рёбер дерева, соответствующего формуле $\mathcal{F}$, в которой нет трёх и более последовательно соединённых одновходовых ФЭ, удовлетворяет неравенству

$$|E(\mathcal{F})| \leqslant 6\big(R(\mathcal{F}) - 1\big). \tag{1.2}$$

Действительно, если $\mathcal{F}$ содержит s_i ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, то

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{b} s_i(k_i - 1) + 1 \geqslant \widehat{L}(\mathcal{F}) + 1,$$

$$|E(\mathcal{F})| \leqslant 3\big(R(\mathcal{F}) + \widehat{L}(\mathcal{F}) - 1\big) \leqslant 3\big(2R(\mathcal{F}) - 2\big) = 6\big(R(\mathcal{F}) - 1\big).$$

Неравенство (1.2) выполняется, в частности, для строго приведённой формулы $\mathcal{F}$.

Для приведённой одновыходной СФЭ Σ на базисом Б её *остовом* будем называть такую формулу $\mathcal{F}(x_1)$ над Б, дерево которой получается в результате применения к каждой вершине Σ операций отсоединения всех исходящих дуг, кроме одной, и объявления начальных вершин этих дуг листьями указанного дерева.

Пусть для $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}\langle \mathcal{L}, n\rangle$ ($\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\langle \mathcal{L}, n\rangle$, $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\{T, n\}$) — множество всех строго приведённых[1] схем из функциональных элементов вида $\Sigma(x_1, \ldots, x_n;\ z_1)$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$ (соответственно формул $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$), для которых $\mathcal{L}(\Sigma) \leqslant \mathcal{L}$ (соответственно $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \leqslant \mathcal{L}$, $T(\mathcal{F}) \leqslant T$).

[1] Напомним [3], что СФЭ является *приведённой*, если в ней нет «висячих» вершин и *строго приведённой*, если в ней, кроме того, нет вершин, в которых реализуются равные ФАЛ.

Лемма 1.2. *Для любых $\mathcal{L} \geqslant 0$, $T \geqslant 0$ и любого натурального n справедливы неравенства*[2]*:*

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{C}}\langle\mathcal{L},n\rangle\right\| \leqslant \left(c_1(\mathcal{L}+n)\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{1.3}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\langle\mathcal{L},n\rangle\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{1.4}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\{T,n\}\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{2^{\frac{T}{\tau_{\text{Б}}}}}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть $\Sigma \in \mathcal{U}^{\text{C}}\langle\mathcal{L},n\rangle$, а $\check{\mathcal{F}}$ — остов Σ. В силу леммы 1.1 и замечания к ней число рёбер в дереве формулы $\check{\mathcal{F}}$ не больше, чем $\widehat{c}_1\mathcal{L}$, где $\widehat{c}_1 = \frac{6}{\rho_{\text{Б}}}$, а число таких попарно не изоморфных формул не превосходит $c_2^{\mathcal{L}/\rho_{\text{Б}}}$, где $c_2 \leqslant 4^6$. Любая формула $\mathcal{F}$ (СФЭ Σ) из $\mathcal{U}^{\text{C}}\langle\mathcal{L},n\rangle$ может быть получена в результате присоединения каждого из $R(\check{\mathcal{F}}) \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}(\check{\mathcal{F}})+1$ (в силу леммы 1.1) листьев дерева формулы $\check{\mathcal{F}}$, являющейся её остовом, к входам $x_1,\ldots,x_n$ (соответственно к входам $x_1,\ldots,x_n$ и внутренним вершинам $\check{\mathcal{F}}$), которое можно осуществить не более, чем $n^{R(\check{\mathcal{F}})}$ (соответственно $(\widehat{c}_1\cdot\mathcal{L}+n)^{R(\check{\mathcal{F}})}$) способами. Перемножая полученные оценки и учитывая (1.1) приходим к (1.3) с константой $c_1 = c_2\max\{\widehat{c}_1,1\}$ и (1.4).

В случае $\Sigma = \mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\{T,n\}$, рассуждая аналогично, приходим к (1.5) с учётом того, что число рёбер в формуле $\check{\mathcal{F}}$ не больше, чем $6\cdot 2^{T/\tau_{\text{Б}}}$, число таких формул не превосходит $(c_2)^{2^{T/\tau_{\text{Б}}}}$, а их ранг ограничен сверху в силу (1.1) числом $2^{T/\tau_{\text{Б}}}$.

Лемма доказана. □

§2 Некоторые модификации контактных схем, итеративные контактные схемы. Верхние оценки числа схем контактного типа

Рассмотрим теперь классы контактных схем (КС) и итеративно-контактных схем (ИКС) над заданным базисом функционально-проводящих элементов (ФПЭ) или, для краткости, контактов, частными случаями которых являются известные классы схем «проводящего» типа — классы «обычных» КС и ИКС (см., например, [3]).

Рассматриваемые схемы строятся из ФПЭ базиса Б $= \{\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_b\}$, каждый элемент $\mathcal{K}_i$, $i=1,\ldots,b$, которого представляет собой тройку $\langle\varphi_i,\mathcal{L}_i,\tau_i\rangle$, где φ_i — ФАЛ, существенно зависящая от БП $x_1,\ldots,x_{k_i}$, $\mathcal{L}_i$ — положительное действительное число, а τ_i — булевская константа. Предполагается, что число $\mathcal{L}_i$ характеризует сложность («вес») ФПЭ $\mathcal{K}_i$, который состоит из ориентированного в случае $\tau_i = 0$ и неориентированного в случае $\tau_i = 1$ контакта K_i, проводящего на наборе α значений БП $x_1,\ldots,x_{k_i}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_i(\alpha) = 1$, причём указанная проводимость в случае $\tau_i = 0$ имеет место только в направлении ориентации $\mathcal{K}_i$.

Таким образом, с формальной точки зрения ФПЭ $\mathcal{K}_i$ представляет собой контакт (ребро) K_i с пометкой φ_i. При этом из содержательных соображений можно считать, что ФПЭ $\mathcal{K}_i$ состоит из контакта K_i и функционального элемента $\mathcal{E}_i$, реализующего ФАЛ φ_i, выход которого «управляет» проводимостью K_i.

[2]Буквой c с различными индексами будем обозначать константы, зависящие только от базиса Б

Следуя [3], определим (одновходовую) КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ над базисом Б как частично ориентированный граф с единственным (проводящим) входом, помеченным символом 1, и m (проводящими) выходами, помеченными выходными БП $z_1, \ldots, z_m$, каждое ориентированное (соответственно, неориентированное) ребро которого помечено одной из базисных ФАЛ φ_i, где $\tau_i = 0$ (соответственно, $\tau_i = 1$), зависящей от k_i переменных из множества входных (управляющих) БП $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Для любой упорядоченной пары (u, v) вершин данной КС стандартным образом вводится ФАЛ проводимости от u к v, зависящая от БП $X(n)$. Будем, как обычно, считать, что в каждой вершине рассматриваемой КС Σ реализуется ФАЛ проводимости от входа 1 к этой вершине, и что сама КС Σ реализует систему ФАЛ $F_\Sigma = (f_1, \ldots, f_m)$, где f_j — ФАЛ, реализуемая в вершине Σ с пометкой z_j, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$ — класс КС над базисом Б, входные и выходные БП которых берутся из счётных упорядоченных непересекающихся алфавитов $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots\}$ соответственно. Предполагается, что базис Б является полным, то есть любая ФАЛ от БП из $\mathcal{X}$ может быть реализована схемой из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$. Заметим, что любой базис, содержащий «обычные» неориентированные замыкающий и размыкающий контакты, т. е. контакты с базисной ФАЛ x_i и $\bar{x}_i$ соответственно, является полным. Базис Б_0, состоящий из замыкающего и размыкающего контактов веса 1, будем считать *стандартным*.

Для удобства будем считать, что при построении схем над базисом Б разрешается подставлять константы вместо БП его контактов. В этом случае необходимым и достаточным условием полноты Б является наличие среди его базисных как ФАЛ, которая не является монотонной, так и ФАЛ, которая не является антимонотонной.

Под сложностью $\mathcal{L}(\Sigma)$ КС Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$, понимается, как обычно, сумма весов всех её ФПЭ, а под сложностью $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{К}}(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ от БП из $\mathcal{X}$ — минимальная из сложностей схем класса $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$, её реализующих. Для указанного функционала сложности обычным образом вводится соответствующая функция Шеннона

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{К}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{К}}(f), \tag{2.1}$$

где, как обычно, $P_2(n)$ — множество всех ФАЛ от БП $X(n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определим далее класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ — класс *итеративно-контактных схем над базисом* Б, который обобщает класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$ аналогично тому как класс «обычных» ИКС [3] обобщает класс обычных КС $\mathcal{U}_{\text{Б}_0}^{\text{К}}$.

Для этого рассмотрим счётный упорядоченный алфавит итеративных БП $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_p, \ldots\}$, где $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \varnothing$, и индукцией по t, $t = 0, 1, \ldots$, введём класс $\mathcal{U}_{\text{Б},t}^{\text{ИКС}}$ — класс ИКС *итеративного ранга* t над базисом Б. Базис указанной индукции составляет класс $\mathcal{U}_{\text{Б},0}^{\text{ИКС}}$ — класс ИКС итеративного ранга 0, который совпадает с классом $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$. Заметим, что класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ является полным тогда и только тогда, когда полон класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$.

Индуктивный переход, позволяющий от ИКС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ из класса $\mathcal{U}_{\text{Б},t}^{\text{ИКС}}$, реализующей систему ФАЛ $(f_1, \ldots, f_m)$ от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$, переходить к реализующей систему ФАЛ $(f'_1, \ldots, f'_{j-1}, f'_{j+1}, \ldots, f'_m)$ от БП $x' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ ИКС

$\Sigma' = \Sigma'(x', z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_m)$ из класса $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б},t+1}$, связан с применением операции присоединения выхода z_j ИКС Σ к её входу x_i. Эта операция применима, если ФАЛ f_j не зависит существенно от x_i и состоит в замене пометки z_j выходной вершины v ИКС Σ, а также всех пометок БП x_i на контактах Σ пометками БП y_{t+1}. При этом предполагается, что ФАЛ $f'_s(x')$, где $s \neq j$, получается из ФАЛ $f_s(x)$ подстановкой ФАЛ $f_j(x')$ вместо БП x_j.

Будем считать, что для описанных выше схем ИКС Σ является *базовой ИКС ранга* t для ИКС Σ' и что переходя от ИКС Σ к её базовой ИКС ранга $(t-1)$ и т. д. мы придём к базовой для ИКС Σ' КС $\widehat{\Sigma}$. Заметим, что сложности всех построенных ИКС одинаковы и равны $L(\widehat{\Sigma})$. Определим, наконец, класс $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}$ как объединение классов $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б},i}$ по всем i, $i = 0, 1, \ldots$.

Для полного класса $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}$ и произвольной системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ обычным образом определяется сложность $\mathcal{L}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}(F)$ — сложность реализации системы F в классе $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}$, а затем аналогично (2.1) вводится соответствующая функция Шеннона $\mathcal{L}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}(n)$.

Пусть, как обычно, $\mathcal{U}^{W}_{\text{Б}}(\mathcal{L}, n)$, где $W \in \{\text{К}, \text{ИКС}\}$, — множество всех схем из $\mathcal{U}^{W}_{\text{Б}}$, реализующих одну ФАЛ из $P_2(n)$. Следуя [3] для (конечного) множества схем $\mathcal{G}$ через $|\mathcal{G}|$ и $||\mathcal{G}||$ будем обозначать число попарно не изоморфных и число попарно не эквивалентных схем в $\mathcal{G}$ соответственно.

Для базиса $\text{Б} = \{\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_b\}$ положим

$$\pi_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \mathcal{L}_i, \qquad \hat{\rho}_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \frac{\mathcal{L}_i}{k_i + 1}, \qquad k_{\text{Б}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant b} k_i.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.1.

$$||\mathcal{U}^{\text{К}}_{\text{Б}}\{\mathcal{L}, n\}|| \leqslant \left(c_3 \mathcal{L} n^{k_{\text{Б}}}\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}}}$$

Теорема 2.2.

$$||\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}\{\mathcal{L}, n\}|| \leqslant \left(c_4(\mathcal{L} + n)\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\hat{\rho}_{\text{Б}}}}$$

§3 Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Установим ряд нижних оценок для введённых в §1, §2 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном [16, 6], который основан на том, что число ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента n.

Пусть $\mathcal{U}$ — один из рассмотренных в §1, §2 классов схем, Ψ — введённый там функционал сложности, а $\Psi(n)$ — функция Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно Ψ. Обозначим через $\mathcal{U}(\Psi, n)$ множество тех схем Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют одну ФАЛ из $P_2(n)$ и для которых $\Psi(\Sigma) \leqslant \Psi$. Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений:

$$||\mathcal{U}\big(\Psi(n), n\big)|| = 2^{2^n}. \tag{3.1}$$

Заметим также, что если для некоторого натурального n и действительных $\widehat{\Psi}$, δ, где $0 < \delta < 1$, выполняется неравенство

$$||\mathfrak{U}\big(\widehat{\Psi}, n\big)|| \leqslant \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то} \tag{3.2}$$

то $\Psi(f) \geqslant \widehat{\Psi}$ для не менее чем $(1-\delta)\cdot 2^{2^n}$ ФАЛ f из $P_2(n)$.

Верхние оценки величины $||\mathfrak{U}(\Psi, n)||$, установленные в §1, §2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (3.1)–(3.2) служат основой для получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ. Напомним, что (см. [3, Гл. 2, теорема 3.1 и лемма 5.3]) для каждого натурального n справедливы неравенства:

$$|\mathfrak{U}^{\mathrm{C}}(L, n)| \leqslant \big(32(L+n)\big)^{L+1}, \tag{3.3}$$

$$|\mathfrak{U}^{\Phi}(L, n)| \leqslant \big(32n\big)^{L+1}, \tag{3.4}$$

$$|\mathfrak{U}^{\mathrm{K}}(L, n)| \leqslant \big(8nL\big)^{L}, \tag{3.5}$$

$$|\mathfrak{U}^{\Phi}(T, n)| \leqslant \big(64n\big)^{2^T}. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Для $\gamma \in \{0, 1\}$ и положительных действительных чисел a, α, y, q таких, что*

$$(ay^{\gamma})^{\alpha y} \geqslant q, \tag{3.7}$$

в случае $\gamma = 1$ и $\frac{a}{\alpha}\log q > 1$ выполняется неравенство

$$y \geqslant \frac{\log q}{\alpha \log\left(\frac{a}{\alpha}\log q\right)}\left(1 + \frac{\log\log\left(\frac{a}{\alpha}\log q\right)}{\log\left(\frac{ae}{\alpha}\log q\right)}\right), \tag{3.8}$$

где e — основание натуральных логарифмов, а в случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ — неравенство

$$y \geqslant \frac{\log q}{\alpha \log a}. \tag{3.9}$$

Доказательство. В случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ неравенство (3.9) получается в результате логарифмирования (3.7) и деления обеих частей полученного неравенства на $\alpha \log a$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = \alpha = a = 1$ и $\log q > 1$. В этом случае неравенство (3.8) следует из того, что левая часть (3.7) монотонно возрастает по y, и для

$$y' = (1+\varepsilon)\frac{\log q}{\log\log q}, \qquad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{\log\log\log q}{\log\left(e\log q\right)},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} y'\log y' = (1+\varepsilon)\frac{\log q}{\log\log q}\big(\log\log q - \log\log\log q + \log e\ln(1+\varepsilon)\big) \leqslant \\ \leqslant \log q(1+\varepsilon)\left(1 - \frac{\log\log\log q}{\log\log q} + \frac{\varepsilon\log e}{\log\log q}\right) = \\ = \log q(1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = \log q\big(1-\varepsilon^2\big) \leqslant \log q. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае $\gamma = 1$, $\alpha > 0$, $a > 0$ неравенство (3.7) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} \geqslant q^{\frac{a}{\alpha}},$$

и поэтому неравенство (3.8) получается из неравенства $y \geqslant y'$ в результате замены y на ay и $\log q$ на $\frac{a}{\alpha}\log q$, если выполнено условие $\frac{a}{\alpha}\log q > 1$.

Лемма доказана. □

Теорема 3.1. *Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon(n) \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, выполняются неравенства*

$$L^{\mathrm{C}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n}\big(1 + \varepsilon(n)\big), \tag{3.10}$$

$$L^{\Phi}(n) \geqslant \frac{2^n}{\log n}\big(1 - \varepsilon(n)\big), \tag{3.11}$$

$$L^{\mathrm{K}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n}\big(1 - \varepsilon(n)\big), \tag{3.12}$$

$$D(n) \geqslant n - \log\log n - \varepsilon(n). \tag{3.13}$$

Доказательство. Неравенства (3.10)–(3.12) выводятся из соответствующего рассматриваемому классу схем $\mathcal{U}$ с функционалом сложности L неравенства (3.3)–(3.5) на основе мощностного равенства (3.1) с использованием леммы 3.1, где $q = 2^{2^n}$, $\alpha = 1$ и

$$\begin{array}{llll} \gamma = 1, & a = 32, & y = L^{\mathrm{C}}(n) + n, & \text{если} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\mathrm{C}}; \\ \gamma = 0, & a = 32n, & y = L^{\Phi}(n) + 1, & \text{если} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\Phi}; \\ \gamma = 1, & a = 8n, & y = L^{\mathrm{K}}(n), & \text{если} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\mathrm{K}}. \end{array}$$

Действительно, подставляя указанные значения в (3.8) и (3.9), получим

$$L^{\mathrm{C}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n+5}\left(1 + \frac{\log(n+5)}{n+7}\right) - n \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{\log n - 5 - o(1)}{n}\right), \tag{3.14}$$

$$L^{\Phi}(n) \geqslant \frac{2^n}{\log n + 5} - 1 \geqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 - \frac{5 + o(1)}{\log n}\right), \tag{3.15}$$

$$L^{\mathrm{K}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n + 3 + \log n}\left(1 + \frac{\log(n + 3 + \log n)}{n + 5 + \log n}\right) \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1 - \frac{3 + o(1)}{n}\right). \tag{3.16}$$

Следовательно, неравенство (3.10) ((3.11), (3.12)) будет справедливо для достаточно больших n при $\varepsilon(n) = \frac{\log n - 6}{n}$ (соответственно $\varepsilon(n) = \frac{6}{\log n}$, $\varepsilon(n) = \frac{4}{n}$).

Аналогичным образом на основе неравенства (3.6) и равенства (3.1) с использованием леммы 3.1, где $q = 2^{2^n}$, $y = 2^{D(n)}$, $\gamma = 0$, $\alpha = 1$ и $a = 64n$, устанавливается справедливость (3.13) при $\varepsilon(n) = \frac{12}{\log n}$.

Теорема доказана. □

Следствие 1.

$$L^{\mathrm{C}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^{\Phi}(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}, \quad L^{\mathrm{K}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$T(n) \geqslant n - \log\log n - o(1).$$

Следствие 2. *Нижние оценки* (3.10)–(3.13) *при указанных в доказательстве значениях $\varepsilon(n)$ справедливы для сложности* (*глубины*) *почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, при их реализации в соответствующих классах схем.*

Действительно, замена величины $q = 2^{2^n}$ величиной $q = \frac{1}{n}2^{2^n}$ при получении оценок (3.14)–(3.16) с помощью леммы 3.1 повлияет только на участвующие в их последних неравенствах функции вида $o(1)$. При этом, в силу (3.2), где $q = \frac{1}{n}$, а $\widehat{\Psi}$ — правая часть соответствующего неравенства (3.10)–(3.12), вновь полученная оценка будет справедлива для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$. Справедливость нижней оценки (3.13) для почти всех ФАЛ устанавливается аналогично.

Рассмотрим теперь мощностные нижние оценки для КС, ИКС, а также для СФЭ и формул в произвольном базисе Б. Следующее утверждение доказывается на основе мощностных соотношений (3.1), (3.2) и леммы 3.1 с использованием оценок §1, §2 аналогично тому, как доказывалась теорема 3.1.

Теорема 3.2. *Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon(n) \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, выполняются неравенства*

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{КС}}(n) \geqslant \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}\big(1 - \varepsilon(n)\big), \tag{3.17}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n) \geqslant \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}\big(1 + \varepsilon(n)\big), \tag{3.18}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n) \geqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}\big(1 + \varepsilon(n)\big), \tag{3.19}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{Ф}}(n) \geqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n}\big(1 - \varepsilon(n)\big), \tag{3.20}$$

$$T_{\text{Б}}(n) \geqslant \tau_{\text{Б}}\big(n - \log\log n - \varepsilon(n)\big). \tag{3.21}$$

Следствие 3.

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{КС}}(n) \gtrsim \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n) \gtrsim \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{Ф}}(n) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n},$$
$$T_{\text{Б}}(n) \geqslant \tau_{\text{Б}}\big(n - \log\log n - o(1)\big).$$

Следствие 4. *Нижние оценки* (3.17)–(3.21) *справедливы для почти всех ФАЛ из $P_2(n)$.*

§4 Универсальные множества ФАЛ и их построение. Асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ и ИКС в произвольном базисе

Напомним (см. [3]), что множество ФАЛ G называется дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) ФАЛ порядка m и ранга p, тогда и только тогда, когда $G \subseteq P_2(m)$ и для любой ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, найдутся функции $g_1, \ldots, g_p$ из G, для которых $g = g_1 \vee \cdots \vee g_p$.

Обобщим понятие ДУМ ФАЛ следующим образом. Пусть $\psi(y_1, \ldots, y_p)$ — существенная ФАЛ, то есть ФАЛ, существенно зависящая от всех своих БП. Множество ФАЛ G, $G \subseteq$ $\subseteq P_2(m)$, называется *ψ-универсальным множеством* (*ψ-УМ*) *порядка* m, если любая ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = \psi(g_1, \ldots, g_p), \tag{4.1}$$

где $g_i \in G$ при всех i, $i = 1, \ldots, p$. Заметим, что в случае $\psi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 \vee \cdots \vee y_p$ понятие ψ-УМ совпадает с понятием ДУМ ранга p.

Так же, как и ДУМ (см. [3]), будем строить ψ-УМ порядка m на основе разбиения $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ единичного куба B^m. Для каждого i, $i = 1, \ldots, p$, в силу существенной зависимости ФАЛ ψ от БП y_i найдётся набор двоичных констант $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p}$ такой, что

$$\psi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\ y_i,\ \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}. \tag{4.2}$$

Обозначим через $G^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p$, множество всех тех ФАЛ из $P_2(m)$, которые при любом i, $1 \leqslant i \leqslant p$ и $j \neq i$, равны $\alpha_{i,j}$ на множестве наборов δ_i, и пусть

$$G = G^{(1)} \cup \cdots \cup G^{(p)}. \tag{4.3}$$

Нетрудно убедиться в том, что равенство (4.1) имеет место для любой функции g, $g \in P_2(m)$, если g_i, $i = 1, \ldots, p$, — ФАЛ из $G^{(i)}$, совпадающая на δ_i с ФАЛ $g \oplus \alpha_{i,i}$. Действительно, для любого i, $i = 1, \ldots, p$, и любого набора β, $\beta \in \delta_i$, в силу (4.2), получим:

$$\psi\big(g_1(\beta), \ldots, g_p(\beta)\big) = \psi\big(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\ g(\beta) \oplus \alpha_{i,i},\ \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}\big) = g(\beta).$$

Следовательно, множество G представляет собой ψ-УМ порядка m, которое будем называть *стандартным ψ-УМ, связанным с разбиением* Δ.

Приведём пример стандартного ψ-УМ для функции $\psi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 y_{t+1} \vee y_2 y_{t+2} \vee \ldots \vee$ $\vee\, y_t y_{2t}$, где $p = 2t$, связанного с разбиением куба B^m на последовательные отрезки $\delta_1, \ldots, \delta_p$ длины $s_1, \ldots, s_p$ соответственно, где $s_1 + \cdots + s_p = 2^m$. Если при этом константы в (4.2) выбрать так, что $\alpha_{i,j} = 1$ только тогда, когда $|i - j| = t$, то соответствующее стандартное ψ-УМ $\widetilde{G}$ порядка m будет иметь вид (4.3), где $G^{(j)}$ состоит из таких ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, для которых $g(\alpha) = 1$ при $\alpha \in \delta_i$, если $|i - j| = t$, и $g(\alpha) = 0$ на остальных отрезках δ_i, за исключением δ_j. Заметим, что полученное ψ-УМ $\widetilde{G}$ имеет мощность $t(2^{s'} + 2^{s''})$, если $|s_1| = \cdots = |s_t| = s'$ и $s_{t+1} = \cdots = |s_{2t}| = s''$, где $t(s' + s'') = 2^m$.

Используем построенные выше стандартные ψ-УМ для синтеза СФЭ в базисе Б, Б $=$ $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$. В силу полноты базиса Б в $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ существуют формулы $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$ и $\mathcal{F}_{\neg}$, реализующие ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x}_1$ соответственно, которыми мы будем заменять ФЭ базиса Б$_0$ при синтезе схем на основе конъюнктивных и дизъюнктивных представлений.

Теорема 4.1 (ср. [3]). *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, такая, что*

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n}\right). \tag{4.4}$$

Доказательство. Найдём среди ФЭ базиса Б, Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, элемент $\mathcal{E}_j$, на котором достигается приведённый вес $\rho_j = \rho_{\text{Б}}$ (см. §1), то есть

$$\rho_j = \frac{\mathcal{L}_j}{k_j - 1} = \min_{k_i \geqslant 2} \rho_i = \rho_{\text{Б}}. \tag{4.5}$$

Пусть, далее, m, s, t, p — натуральные числа такие, что

$$p = t(k_j - 1) + 1, \tag{4.6}$$

$$k_j \leqslant \frac{2^m}{s} \leqslant p < \frac{2^m}{s} + (k_j - 1), \tag{4.7}$$

а $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_p)$ — такое разбиение куба B^m на последовательные отрезки, что

$$|\pi_i| = s_i \leqslant s. \tag{4.8}$$

Построим из t ФЭ $\mathcal{E}_j$ бесповторную формулу $\mathcal{F}_t$ с p входами, которая имеет вид квазиполного l-ярусного, $l = \lceil \log_k p \rceil$, дерева и реализует ФАЛ $\psi(y_1, \ldots, y_p)$. Пусть G, $G \subseteq P_2(m)$, — стандартное ψ-УМ порядка m, связанное с разбиением Π, для которого в силу (4.6)–(4.8)

$$|G| = \lambda \leqslant p \cdot 2^s. \tag{4.9}$$

Искомая СФЭ Σ_f строится, как обычно, на основе разложения ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменным $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot f_{\sigma''}(x'), \tag{4.10}$$

где $q = m$, $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, а $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. При этом для реализации каждой ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, используется её представление

$$f_{\sigma''}(x') = \psi(g_{\sigma'',1}, \ldots, g_{\sigma'',p}), \tag{4.11}$$

где ФАЛ $g_{\sigma'',1}, \ldots, g_{\sigma'',p}$ берутся из множества G.

Для системы ФАЛ $\overrightarrow{G}$ построим реализующую её СФЭ Σ_G, $\Sigma_G \in \mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, сложности не более чем $c \cdot p \cdot 2^{m+s}$ путём моделирования формулами в «базисе» $\mathcal{F}_{\&}, \mathcal{F}_{\vee}, \mathcal{F}_{\neg}$ π-схем, полученых в результате «вложения» в структуру контактного дерева совершенных ДНФ ФАЛ из G.

Пусть, далее, СФЭ Σ' содержит СФЭ Σ_G в качестве подсхемы и для каждого σ'', $\sigma'' \in$ $\in B^{n-q}$, реализует ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ в соответствии с (4.11), используя для этого формулу $\mathcal{F}_t$. Схема Σ_f представляет собой суперпозицию вида $\Sigma_f = \Sigma'(\Sigma'')$, где СФЭ Σ'' — мультиплексор порядка $(n-q)$ от БП x'', и реализует ФАЛ f в соответствии с (4.10). Сложность построенной СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, с учётом (4.5)–(4.9) будет удовлетворять неравенству

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot t \cdot 2^{n-m} + O\big(2^{n-m} + p \cdot 2^s + p \cdot 2^{s/2+m}\big), \tag{4.12}$$

из которого при

$$m = q = \lceil 2 \log n \rceil, \quad s = \lceil n - 5 \log n \rceil \tag{4.13}$$

и при значениях остальных параметров, определённых из (4.6)–(4.7), следует (4.4).

Теорема доказана. □

Следствие.

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n) \sim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

Теорема 4.2. *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её ИКС $\widehat{\Sigma}_f$, $\widehat{\Sigma}_f \in \mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$, такая, что*

$$\mathcal{L}(\widehat{\Sigma}_f) \leqslant \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n}\right). \tag{4.14}$$

Доказательство. Найдём среди ФПЭ базиса Б, Б $= \{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^b$, элемент $\mathcal{K}_j$, для которого $\hat{\rho}_j = \hat{\rho}_{\text{Б}}$ (см. §2), то есть

$$\hat{\rho}_j = \frac{\mathcal{L}_j}{k_j + 1} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \hat{\rho}_i = \hat{\rho}_{\text{Б}}. \tag{4.15}$$

Пусть, далее, m, s, t, p — натуральные числа такие, что

$$p = t(k_j + 1), \tag{4.16}$$

$$k_j \leqslant \frac{2^m}{s} \leqslant p < \frac{2^m}{s} + k_j, \tag{4.17}$$

а $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_p)$ — такое разбиение куба B^m на последовательные отрезки, что

$$|\pi_i| = s_i \leqslant s. \tag{4.18}$$

Пусть $(t, 1)$-КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ над базисом Б представляет собой «звезду» из t управляемых непересекающимися наборами БП $y^{(1)}, \ldots, y^{(t)}$ длины k_j контактов $\mathcal{K}_j$. При этом центр звезды является выходом КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$, а её концевые вершины — проводящими входами $\widehat{\mathcal{F}}_t$, помеченными различными БП набора $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_t^{(0)})$. Таким образом, КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ реализует ФАЛ

$$\widehat{\psi}(y_1, \ldots, y_p) = y_1^{(0)} \cdot \varphi_j\big(y^{(1)}\big) \vee \ldots \vee y_t^{(0)} \cdot \varphi_j\big(y^{(t)}\big).$$

Обозначим через $\widehat{G}$ стандартное $\widehat{\psi}$-УМ порядка m, построенное на основе разбиения Π так, что для любого набора $(g^{(1)}, \ldots, g^{(t)})$, составленного из ФАЛ G и связанного с набором БП $y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(t)})$ и любого набора $\alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(t)})$ значений БП y не более одной из ФАЛ $\varphi_j\big(g^{(i)}(\alpha^{(i)})\big)$, где $i = 1, \ldots, t$, обращается в 1.

Построим ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ аналогично тому, как строилась СФЭ Σ_f при доказательстве теоремы 4.1, на основе разложений (4.10) и (4.11) с использованием ФАЛ $\widehat{\psi}$ вместо ФАЛ ψ, ИКС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ вместо формулы $\mathcal{F}_t$ и множества $\widehat{G}$ вместо множества G.

Заметим, что $\lambda = |\widehat{G}|$ по-прежнему удовлетворяет (4.9) и пусть $(1, \lambda)$-КС $\widehat{\Sigma}_G$ построена из контактов базиса Б, моделирующих замыкающий и размыкающий контакты стандартного базиса (см. §2), реализует систему из ФАЛ множества $\widehat{G}$ и имеет сложность

$$L\big(\widehat{\Sigma}_G\big) \leqslant \lambda \cdot 2^{m+1}.$$

Заметим также, что в силу $\widehat{\psi}$-универсальности множества ФАЛ $\widehat{G}$ для любой ФАЛ $g(x')$ справедливо представление

$$g\big(x'\big) = \widehat{\psi}\big(g_1, \ldots, g_p\big) \tag{4.19}$$

где $g_j \in \widehat{G}$ для всех j, $j = 1, \ldots, p$. Для реализации данного представления достаточно входы $y_1, \ldots, y_p$ КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ присоединить к выходам КС $\widehat{\Sigma}_G$ в соответствии с (4.19), причём указанная реализация является корректной суперпозицией соответствующих схем в силу отмеченных выше свойств ортогональности ФАЛ из G, подставляемых вместо БП из y.

Пусть ИКС $\widehat{\Sigma}'$ от БП x' содержит в качестве подсхемы КС $\widehat{\Sigma}_G$ и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих 2^{n-q} выходов согласно (4.19), используя для этого схему $\widehat{\mathcal{F}}_t$, входы которой присоединены к выходам $\widehat{\Sigma}_G$ соответствующим образом.

Искомая ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ содержит ИКС $\widehat{\Sigma}'$ в качестве подсхемы и представляет собой результат корректной суперпозиции вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — $(2^{n-q}, 1)$-КС, моделирующая в базисе Б контактное дерево от БП x'', входы (листья) которого присоединены к выходам $\widehat{\Sigma}'$ в соответствии с (4.10).

Сложности ИКС Σ' и КС Σ'' удовлетворяют неравенствам

$$L\big(\Sigma'\big) \leqslant L\big(\Sigma_G\big) + 2^{n-q} \cdot t, \qquad L\big(\Sigma''\big) \leqslant 2^{n-q+1}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}\big(\Sigma_f\big) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot 2^{n-q} \cdot t + O\big(2^{n-q}\big) + O\big(2^s + t \cdot 2^{q+s/2}\big).$$

Оценка (4.14) получается из последнего неравенства при тех же значениях параметров, что и в теореме 4.1, при которых, начиная с достаточно большого n, выполнены все необходимые соотношения.

Теорема доказана. □

Следствие. *Из* (4.14) *с учётом нижней оценки §3 вытекает соотношение*

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n) \sim \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

§5 Асимптотически наилучший метод синтеза формул и контактных схем в произвольном базисе

При синтезе СФЭ в базисе Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^b$ мы использовали некоторые формулы $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$ и $\mathcal{F}_{\neg}$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{Ф}}$, реализующие ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x}_1$ соответственно, для моделирования конъюнктивных и дизъюнктивных представлений ФАЛ. При этом возможность такого моделирования и его сложность не налагали на данные формулы каких-либо структурных или параметрических ограничений. В то же время при использовании формул $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\neg}$ для аналогичного моделирования конъюнктивных и дизъюнктивных представлений ФАЛ в классе $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{Ф}}$ необходимо обеспечить отсутствие «внутренних» ветвлений в получающихся схемах за счёт определенных ограничений на их структуру.

Напомним, что БП, встречающаяся в записи формулы только один раз, считается *бесповторной* БП этой формулы и что формула, все БП (соответственно, все существенные БП) которой бесповторны, называется *бесповторной* (соответсвенно, *квазибеспоторной*). В [3] было доказано следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Существуют квазибесповторные формулы $\mathcal{F}_{\neg}$, $\mathcal{F}_{\&}$ и $\mathcal{F}_{\vee}$ над базисом* Б*, которые реализуют ФАЛ $\overline{x}_1$, $x_1 \cdot x_2$ и $x_1 \vee x_2$ соответственно.*

Напомним, далее, что (см., например, [3]) множество δ, $\delta \subseteq B^q$ называется *m-регулярным* множеством наборов куба B^q, если $m < q$, $|\delta| = 2^m$ и все префиксы[1] длины m наборов из δ различны. Заметим, что m-регулярному множеству δ, $\delta \subseteq B^q$, можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор $\alpha = (\beta, \gamma)$, где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $g(\beta) = \gamma$. Заметим также, что любая ФАЛ g, $g \in P_2(q)$, совпадает на m-регулярном множестве наборов δ, $\delta \subseteq B^q$, с некоторой ФАЛ из $P_2(m)$, если рассматривать $P_2(m)$ как множество всех ФАЛ из $P_2(q)$ с несущественными БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$. При этом любая ФАЛ из связанной с δ системы функций совпадает на δ с соответствующей БП куба B^q.

Распространим операцию сложения двоичных наборов (слов) по модулю 2 на тот случай, когда длина второго слагаемого может быть больше длины первого. Для наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in B^m$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B^n$, где $n \geqslant m$, определим их сумму $\alpha \oplus \beta$ как набор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in B^n$, который представляет собой поразрядную сумму по модулю 2 префикса длины n набора $(\alpha, \ldots, \alpha) \in B^a$, где $a = \lceil n/m \rceil$, с набором β и заметим, что при этом уравнение $\alpha \oplus \beta = \gamma$ имеет единственное относительно β решение при любых α, $\alpha \in B^m$, и γ, $\gamma \in B^n$.

На основе введённой операции при любых β, $\beta \in B^t$, и $\lambda \leqslant t$ обычным образом определяется сумма $\delta \oplus \beta$, где $\delta \subseteq B^\lambda$, а также сумма $g \oplus \beta$, где $g = (g_1, \ldots, g_\lambda) \in P_2^\lambda(m)$. При этом последняя сумма является набором длины t, который по-прежнему состоит из ФАЛ системы g или их отрицаний и задаёт m-регулярное множество наборов куба B^t. Заметим также, что любая ФАЛ системы g хотя бы один раз входит в систему $g \oplus \beta$ без отрицания, если для каждого i, $i = 1, \ldots, \lambda$, хотя бы один из разрядов набора β с номером $i + \lambda \cdot j$, где $0 \leqslant j \leqslant \lceil t/\lambda \rceil$ и $\lambda \cdot j \leqslant t$, равен 0.

Пусть $G \subseteq P_2(m)$ и $|G| = \lambda$, а $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$, где $q > m$, — разбиение куба B^q на m-регулярные компоненты. Будем говорить, что разбиение Δ *моделирует ФАЛ из G с помощью БП или их отрицаний*, если для любого i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, любая ФАЛ g, $g \in G$, совпадает на δ_i с некоторой буквой x_j^σ, где $1 \leqslant j \leqslant q$ и $\sigma \in B$. Компонента δ_i считается при этом *хорошей компонентой* разбиения Δ (относительно множества G) в том случае, когда для любой ФАЛ g, $g \in G$, указанное совпадение имеет место при $\sigma = 1$.

Лемма 5.2. *Пусть $G \subseteq P_2(m)$, $|G| = \lambda$, $q = m + a\lambda$ и пусть δ_i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, — m-регулярное разбиение куба B^q, которое соответствует системе ФАЛ $\overrightarrow{G} \oplus \beta$, где $\beta \in B^{q-m}$ и $\nu(\beta) = i - 1$. Тогда система множеств $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ образует m-регулярное разбиение куба B^q, которое моделирует ФАЛ из G с помощью БП или их отрицаний и имеет при этом долю «плохих» компонент не больше, чем $\frac{\lambda}{2^a}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что система множеств Δ является разбиением куба B^q. Для этого в силу того, что мощность каждого из них равна 2^m, достаточно убедиться в том, что Δ — покрытие куба B^q, то есть любой набор γ, $\gamma \in B^q$, входит хотя бы в одно из множеств δ_i, $i \in [1, 2^{q-m}]$.

[1] Для слова (набора) α вида $\alpha = \beta\gamma$ слово β (γ) считается его *префиксом* (соответственно *суффиксом*).

Действительно, представим набор γ в виде $\gamma = (\alpha, \hat{\gamma})$, где $\alpha \in B^m$, и найдём набор β, $\beta \in B^{q-m}$, который является единственным решением уравнения $\overrightarrow{G}(\alpha) \oplus \beta = \hat{\gamma}$. Следовательно, $\gamma \in \delta_i$, где $\nu(\beta) = i - 1$, и система множеств Δ является разбиением куба B^q.

Заметим, что в силу отмеченных выше свойств операции сложения по модулю 2, разбиение Δ обладает всеми необходимыми для моделирования множества ФАЛ G свойствами, и что при этом число его «плохих» компонент не больше, чем $\lambda \cdot 2^{q-m-a}$.

Лемма доказана. □

Теорема 5.1. *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ существует реализующая её формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathfrak{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, такая, что*

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{F}_f\big) \leqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n}\Big(1 + \frac{\log\log n \pm O(1)}{\log n}\Big). \tag{5.1}$$

Доказательство. Выберем ФЭ $\mathcal{E}_j$, введём натуральные параметры m, s, t, p, l, λ и определим разбиение Π, формулу $\mathcal{F}_t$, ФАЛ ψ, ψ-УМ G порядка m так, как это было сделано в доказательстве теоремы 4.1 и так, чтобы выполнялись соотношения (4.5)–(4.9).

Выберем, далее, натуральные параметры q и r так, что

$$q = m + a\lambda \leqslant n \tag{5.2}$$

и построим по лемме 5.2 для множества ФАЛ G соответствующее m-регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x' = (x_1 \ldots x_q)$. Заметим, что для произвольной ФАЛ $g(x')$ и любого i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, в силу ψ-универсальности множества G, m-регулярности разбиения Δ и возможности моделировать ФАЛ из G на компонентах Δ с помощью БП или их отрицаний всегда найдутся такие натуральные числа $j_1, \ldots, j_p$ из $[m+1, q]$ и булевы константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, которые равны 1, если δ_i — «хорошая» компонента, и для которых равенство

$$g\big(x'\big) = \psi\big(x_{j_1}^{\alpha_1}, \ldots, x_{j_p}^{\alpha_p}\big) \tag{5.3}$$

выполняется на любом наборе из δ_i.

Возьмём (см. (4.10)) разложение ФАЛ f по БП $x'' = (x_{q+1} \ldots x_n)$ и продолжим его на основе (5.3) так, что

$$f\big(x', x''\big) = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}\big(x''\big) \cdot f_{\sigma''}\big(x'\big) = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i\big(x_i\big) \cdot \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}\big(x''\big) \cdot \psi\big(x_{j_{1,i,\sigma''}}^{\alpha_{1,i,\sigma''}}, \ldots, x_{j_{j,i,\sigma''}}^{\alpha_{p,i,\sigma''}}\big), \tag{5.4}$$

где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i разбиения Δ. Искомая формула $\mathcal{F}_f$ получается из последнего представления (5.4) ФАЛ f следующим образом:

1) характеристическая ФАЛ χ_i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, реализуется по своей совершенной ДНФ;

2) мультиплексорная ФАЛ μ_{n-q} порядка $(n-q)$ от адресных БП x'', связанная с разложением f по этим БП, реализуется с помощью бесповторной по информационным БП формулы из $\mathfrak{U}^{\text{C}}$ сложности не больше, чем $4 \cdot 2^{n-q}$ (см. [3]);

3) каждая ФАЛ вида (5.3) реализуется одной формулой $\mathcal{F}_p$ с необходимыми инверсиями её БП в случае «плохой» компоненты δ_i;

4) все используемые при реализации формул из пунктов 1-3 элементы базиса $Б_0$ заменяются соответствующими им бесповторными формулами $\mathcal{F}_\&$, $\mathcal{F}_\vee$, $\mathcal{F}_\neg$ из леммы 5.1.

Для сложности построенной таким образом формулы $\mathcal{F}_f$ будет (ср. с (4.12)) справедливо неравенство

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{F}_f\big) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot t \cdot 2^{n-m} + O\big(2^{n-m}\big(1 + \frac{t \cdot \lambda}{2^a}\big) + q \cdot 2^q\big), \tag{5.5}$$

которое при значениях параметров

$$m = \lfloor 3 \log\log n \rfloor, \qquad s = \lfloor \log n - 3 \log\log n \rfloor - 1, \qquad a = \lceil \log n \rceil - 1$$

удовлетворяющих при достаточно больших n условиям (5.2), даёт оценку (5.1).

Теорема доказана. □

Теорема 5.2. *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её КС Σ_f, $\Sigma_f \in \mathfrak{U}^{К}_{Б}$, такая, что*

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \pi_Б \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)\right). \tag{5.6}$$

Доказательство. Найдём среди ФПЭ базиса Б, $Б = \{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^b$, элемент $\mathcal{K}_j$, для которого $\mathcal{L}_j = \pi_Б$ (см. §2), то есть

$$\mathcal{L}_j = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \mathcal{L}_i = \pi_Б.$$

Пусть для определённости, из базисной ФАЛ φ_j (см. §2) подстановкой констант можно получить ФАЛ x_1, а из ФАЛ φ_r, $1 \leqslant r \leqslant b$, — ФАЛ $\overline{x}_1$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$ получающиеся при этом из $\mathcal{K}_j$ и $\mathcal{K}_r$ замыкающий и размыкающий контакты соответственно и положим $\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_j$, $\check{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_r$.

Будем строить КС Σ_f из контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$ в соответствии с асимптотически наилучшим методом синтеза КС в стандартном базисе (см. [3, Гл. 4, §7]) с использованием леммы 5.2, для того, чтобы долю контактов $\check{\mathcal{K}}$ в Σ_f можно было сделать бесконечно малой.

Пусть m, s и t — натуральные числа такие, что

$$s \leqslant 2^m, \qquad t = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \tag{5.7}$$

а $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_t)$ — разбиение куба B^m на последовательные отрезки длины не больше чем s. Обозначим через G стандартное ДУМ порядка m и ранга t от БП $(x_1, \ldots, x_m)$, которое связано с разбиением Π, и пусть

$$\lambda = |G| \leqslant t \cdot 2^s, \tag{5.8}$$

а $h_1, \ldots, h_t$ — входящие в него характеристические ФАЛ отрезков $\pi_1, \ldots, \pi_t$ соответственно. Напомним, что при этом $G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(t)}$, где $G^{(i)}$, $i = 1, \ldots, t$, состоит из всех ФАЛ g, для которых $g \leqslant h_i$.

Введём натуральный параметр a, положим

$$q = m + a \cdot \lambda \leqslant n \tag{5.9}$$

и рассмотрим разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x' = (x_1, \ldots, x_q)$ на m-регулярные компоненты, построенное по лемме 5.2 для системы ФАЛ $h = (h_1, \ldots, h_t)$.

Пусть по-прежнему (см. §4) $\widehat{\mathcal{F}}_t$ — $(t, 1)$-КС из t контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ от БП $y^{(0)} = (y_1, \ldots, y_t)$, соответствующих её «проводящим» входам и БП $y^{(1)} = (y_{t+1}, \ldots, y_{2t})$, управляющих её контактами, которая реализует ФАЛ

$$\widehat{\psi}\big(y^{(0)}, y^{(1)}\big) = y_1 y_{t+1} \vee \ldots \vee y_t y_{2t}.$$

Заметим, что любая ФАЛ $g(x')$ на любой компоненте δ_i разбиения Δ совпадает с ФАЛ

$$g_i(x') = \widehat{\psi}\big(g_{i,1}, \ldots, g_{i,t},\ x_{j_{i,1}}^{\tau_{i,1}}, \ldots, x_{j_{i,t}}^{\tau_{i,t}}\big), \tag{5.10}$$

где $g_{i,r} \in G^{(r)}$, $m+1 \leqslant j_{i,r} \leqslant q$ и $\tau_{i,r} \in B$ при всех r, $r = 1, \ldots, t$, причём $\tau_{i,1} = \ldots = \tau_{i,t} = 1$, если δ_i — «хорошая» компонента.

Полагая, как и раньше, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$, разложим реализуемую ФАЛ $f(x', x'')$ следующим образом

$$f(x', x'') = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \big(\bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot f_{\sigma'',i}(x') \big), \tag{5.11}$$

где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i, $i = 1, \ldots, 2^t$, а ФАЛ $f_{\sigma'',i}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, имеет вид правой части равенства (5.10) для ФАЛ $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$.

Пусть $(1, \lambda)$-КС Σ_G, построенная из контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$, реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{G}$ на основе совершенных ДНФ входящих в неё ФАЛ с использованием контактного дерева от БП $(x, \ldots, x_m)$ со сложностью

$$\mathcal{L}\big(\Sigma_G\big) \leqslant \big(\widehat{\mathcal{L}} + \check{\mathcal{L}}\big) \cdot 2^m. \tag{5.12}$$

Пусть, далее, для каждого i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, $(1, 2^{n-q})$-КС Σ'_i содержит КС Σ_G в качестве своей подсхемы и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma'',i}$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих выходов в соответствии с (5.10). Для этого используется либо КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$, если δ_i — «хорошая» компонента, либо КС, которая получается из $\widehat{\mathcal{F}}_t$ заменой части контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ контактами $\check{\mathcal{K}}$, в остальных случаях. Заметим, что указанные схемы являются разделительными по входам на компоненте δ_i, что обеспечивает корректность применяемых операций суперпозиции на ней. Определим $(1, 2^{n-m})$-КС Σ' как КС, которая получается отождествлением входов у всех КС Σ'_i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, и реализует на своих 2^{n-m} выходах все ФАЛ вида $f_{\sigma'',i}(x')$.

Рассмотрим теперь $(2^{q-m}, 1)$-КС $\widetilde{\Sigma}$, которая получается из $(2^q, 1)$-КД от БП x' отождествлением для каждого i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, тех его листьев, которые соответствуют конъюнкциям вида $x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_q^{\sigma_q}$, где $(\sigma_1, \ldots, \sigma_q) \in \delta_i$. Построим, наконец, $(2^{n-m}, 1)$-КС Σ'', которая получается в результате присоединения к каждому входу КС $\widetilde{\Sigma}$ выхода (корня) $(2^{n-q}, 1)$-контактного дерева от БП x''. Заметим, что все операции суперпозиции, использованные при построении КС Σ'', являются корректными и поэтому Σ'' разделительна по входам, а система ФАЛ

проводимости между её входами и выходом состоит из всех ФАЛ вида $\mathfrak{X}_i(x') \cdot K_{\sigma''}(x'')$, где $i \in [1, 2^{q-m}]$ и $\sigma'' \in B^{n-q}$.

Искомая КС Σ_f содержит КС Σ' в качестве подсхемы и представляет собой результат суперпозиции вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, при выполнении которой входы Σ'' присоединяются к выходам Σ' в соответствии с (5.11). В силу разделительности КС Σ'' по входам указанная суперпозиция является корректной и поэтому КС Σ_f действительно реализует ФАЛ f.

Из (5.7)–(5.9) и (5.12) с учётом того, что число контактов в контактном дереве от d БП равно $2^{d+1} - 2$, вытекает неравенство (ср. с (5.5))

$$\mathcal{L}\big(\Sigma_f\big) \leqslant \widehat{\mathcal{L}} \cdot 2^{n-m} \cdot t + O\big(2^q + 2^{n-m}\big(1 + \frac{t \cdot \lambda}{2^a}\big)\big).$$

Оценка (5.6) получается из последнего неравенства при следующих значениях параметров

$$a = \lfloor \log n \rfloor, \qquad m = \left\lfloor \frac{3}{2} \log n \right\rfloor, \qquad s = \lceil n - 3a\sqrt{n} \rceil,$$

при которых, начиная с достаточно большого n, выполнены все необходимые соотношения и, в частности, неравенства (5.9).

Теорема доказана. □

Следствие. *Из* (5.6) *с учётом нижней оценки §3 вытекает соотношение*

$$L_{\text{Б}}^{\text{К}}(n) \sim \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

Поведение функции Шеннона для задержки ФАЛ в произвольном базисе. Синтез СФЭ асимптотически

§6 Мультиплексорные ФАЛ и обобщённое разложение. ~~Оптимальная по задержке реализация мультиплексорных ФАЛ в произвольном базисе~~

оптимальных как по сложности, так и по задержке для почти всех ФАЛ.

Пусть $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ — разбиение куба B^n от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$. *Обобщённая мультиплексорная ФАЛ* соответствующая разбиению Δ определеляется равенством

$$\mu_\Delta(x,\, u_1, \ldots, u_p) = \bigvee_{i=1}^{p} \chi_{\delta_i}(x) u_i,$$

где χ_{δ_i} — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i. Тогда стандартную мультиплексорную ФАЛ порядка n

$$\mu_n(x,\, u_0, \ldots, u_{2^n-1}) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in B^n} K_\sigma(x) u_{\nu(\sigma)}$$

можно рассматривать как обобщённую мультиплексорную ФАЛ μ_Δ с тривиальным разбиением Δ таким, что $\delta_{\nu(\sigma)} = \{\sigma\}$ для каждого σ, $\sigma \in B^n$.

Лемма 6.1. *Для любой существенной ФАЛ $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ и любого разбиения $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$, $d = p$, куба B^n от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$ существуют ФАЛ $g_i(x, y_i)$, $i = 1, \ldots, p$, которые монотонно или антимонотонно зависят от БП $y_1, \ldots, y_p$, такие что $\varphi(g_1, \ldots, g_p) = \mu_\Delta(x,\, y_1, \ldots, y_p)$.*

Доказательство. Существенность ФАЛ φ означает, что для любого i, $i = 1, \ldots, p$, найдутся булевские константы $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p}$ такие, что

$$\varphi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\, y_i,\, \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}.$$

Значит, определив ФАЛ g_i так, что

$$g_i(\beta, y_i) = \begin{cases} \alpha_{i,j}, & \text{если } \beta \in \delta_j \text{ при } j \neq i; \\ y_i \oplus \alpha_{i,i}, & \text{если } \beta \in \delta_i; \end{cases} \qquad (6.1)$$

для всякого β, $\beta \in \delta_i$, будем иметь

$$\begin{aligned} &\varphi(g_1(\beta, y_1), \ldots, g_{i-1}(\beta, y_{i-1}),\, g_i(\beta, y_i),\, y_{i+1}(\beta, y_{i+1}), \ldots, g_p(\beta, y_p)) = \\ &\quad = \varphi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\, y_i \oplus \alpha_{i,i},\, \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}) = (y_i \oplus \alpha_{i,i}) \oplus \alpha_{i,i} = y_i = \\ &\quad = \mu_\Delta(\beta, y_1, \ldots, y_p). \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Из (6.1) следует, что каждая ФАЛ g_j зависит от БП y_j только на компоненте δ_j, на которой $g_j = y_j \oplus \alpha_{j,j}$. Следовательно, каждая ФАЛ g_j либо монотонно, либо антимонотонно зависит от БП y_j.

Лемма доказана. □

Замечание. Лемма 6.1 остаётся верна и в случае, когда $d < p$, если при этом формально считать все недостающие компоненты Δ пустыми $\delta_{d+1} = \cdots = \delta_p = \varnothing$. Соответствующие пустым компонентам БП $y_{d+1}, \ldots, y_p$ являются фиктивными БП ФАЛ $g_{d+1}, \ldots, g_p, \mu_\Delta$.

Теорема 6.1 Пусть для $n=1,2\ldots$ $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $u=(u_0,\ldots u_{2^n-1})$. Тогда в $U_Б^{\varphi}$ существует бесповторная по БП и формула $F_n(x,u)$, реализующая ФАЛ $\mu_n(x,u)$, такая, что

$$T(F_n)\le \tau_Б\cdot n+c_5\cdot\log n,\ \mathcal{L}(F_n)\le n^{\varepsilon}\cdot 2^n \qquad (6.3)$$

Доказательство. Заметим, сначала, что

$$T_Б(n)\le T_Б(\mu_n)+c_7,$$

так как из формулы, реализующей ФАЛ μ_n, подставивской константы вместо БП из u можно получить формулу для любой ФАЛ из $P_2(n)$.

Докажем (6.3) для случая $n=2^k$ индукцией по $k=1,2,\ldots$, базис которой, очевидно, выполняется. Убедимся в справедливости индуктивного перехода от $m=2^k$ к $n=2^{k+1}$.

Пусть $x'=(x_1,\ldots,x_m)$, $z=(z_0,\ldots,z_{2^m-1})$, $x''=(x_{m+1},\ldots,x_n)$ и $u=(u^{(0)},\ldots,u^{(2^m-1)})$, где $u^{(i)}$, $i=0,\ldots,2^m-1$, – набор длины 2^m из информационных БП набора u. Пусть, далее, $\mathcal{E}_r$ – функциональный элемент базиса Б, для которого $\tau_r=\tau_Б$, $l=\lceil\log_{k_r}(2^m)\rceil$ и Φ – l-ярусное полное дерево из ФЭ $\mathcal{E}_r$ с $p=(k_r)^l\ge 2^m$ входами, а $\psi(y_1,\ldots,y_p)$ – ФАЛ, реализуемая формулой Φ.

Пусть, по-прежнему (см. лемму 5.1), $F_\&$, $F_\vee$ и $F_\neg$ – бесповторные по существенным БП формулы из $U_Б^{\varphi}$, реализующие ФАЛ x_1x_2, $x_1\vee x_2$ и $\bar{x}_1$ соответственно, и пусть $F_m(x',z)$ – существующая по индуктивному предположению и удовлетворяющая (6.3) формула для ФАЛ $\mu_m(x',z)$.

По лемме 6.1 найдем такие ФАЛ $g_j(x', z_j)$, $j=0,\dots,2^m-1$, и $g_j(x')$, $j=2^m,\dots,(p-1)$, для которых

$$\mu_m(x', z) = \Phi(g_0(x', z_0), \dots, g_{2^m-1}(x', z_{2^m-1}), g_{2^m}(x'), \dots, g_{p-1}(x')), \quad (6.4)$$

где ФАЛ $g_j(x', z_j)$ в силу леммы 6.1 для каждого j, $0 \le j \le 2^m-1$, и соответствующего ему булевского значения α_j имеет вид

$$g_j(x', z_j) = \hat{g}_j(x') \vee \check{g}_j(x') \cdot z_j^{\alpha_j} \quad (6.5).$$

Тогда в качестве искомой для обоснования рассматриваемого индуктивного перехода формулы $F_n(x, u)$ можно взять формулу, которая получается в результате следующих преобразований правой части (6.4):

1) заменой каждой ФАЛ $g_j(x', z_j)$, $j=0,\dots,2^m-1$, на правую часть (6.5) с использованием формул $F_\&$, $F_\vee$, $F_\neg$;

2) подстановкой формулы $F_m(x'', u^{(i)})$ вместо БП z_i, $i=0,\dots,2^m-1$.

Действительно, полученная таким образом формула $F_n(x, u)$ будет реализовать ФАЛ $\mu_n(x, u)$ в соответствии с равенством

$$\mu_n(x, u) = \mu_m(x', \mu_m(x'', u^{(0)}), \dots, \mu_m(x'', u^{(2^m-1)})). \quad (6.6)$$

При этом для неё по построению будут выполняться неравенства:

$$T(F_n) \le T(\Phi) + T(F_m) + c_7 + T(F_\&) + T(F_\vee) + T(F_\neg) \le c_5 n + c_5(k+1),$$

$$\mathcal{L}(F_n) \le \mathcal{L}(\Phi) + (c_7 + 2\mathcal{L}(F_m))2^m + (p-2^m)\mathcal{L}(F_m) \le$$

$$\le (c_8 + 2m^{c_6} \cdot 2^m) k_j 2^m \le c_9 \cdot m^{c_6} 2^{2m} \le n^{c_6} 2^n,$$

если в качестве c_6 взять константу, которая

не меньше, чем $\log C_9$.

Пусть теперь число n не является степенью двойки и имеет вид $n = 2^{t_1} + \dots + 2^{t_s}$, где $\lfloor \log n \rfloor \geq t_1 > \dots > t_s \geq 0$. Положим $m_i = 2^{t_i}$, $i = 1, \dots, s$, и разобьем набор БП x на поднаборы $x^{(1)}, \dots, x^{(s)}$ длины $t_1, \dots, t_s$ соответственно. По аналогии с (6.6) представим ФАЛ $\mu_n(x, u)$ в виде суперпозиции

$$\mu_n(x, u) = \mu_{m_1}(x^{(1)}, \mu_{m}(x^{(2)} \dots \dots) \dots)$$

и построим в соответствии с ней искомую формулу $F_n(x, u)$ используя уже построенные формулы вида F_{m_i}, $i = 1, \dots, s$. Нетрудно убедиться в том, что для формулы $F_n(x, u)$ соотношения (6.3) будут выполняться.

Теорема доказана.

Теорема 6.2 При всех $n = 1, 2, \dots$ для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её СФЭ Σ_f такая, что

$$T(\Sigma_f) \lesssim \tau_5 \cdot n, \quad L(\Sigma_f) \lesssim \rho_5 \frac{2^n}{n}$$

Доказательство. Искомая СФЭ Σ_f строится аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 4.1, с той лишь разницей, что в качестве СФЭ Σ'', реализующей ФАЛ μ_{n-q} от адресных БП x'', используется формула F_{n-q}, построенная по теореме 6.1.

При этом параметры m, q, s выбираются так, чтобы по-прежнему выполнялось соотношение $L(\Sigma'') = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$. Достаточно, например, положить

$$q = m = \lceil (2 + C_6) \log n \rceil, \quad s = \left\lceil \frac{n - (2m+1)}{\log n} \right\rceil.$$

Теорема доказана

Следствие Для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, можно построить реализующую её СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in U_5^c$, с асимптотически оптимальными значениями как сложности, так и задержки.

II Некоторые вопросы надежности дискретных управляющих систем.

§7 Оценка надёжности схем. Асимптотически наилучший метод синтеза сколь угодно надёжных СФЭ в базисе из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования

Для определения уровня надёжности схемы часто применяется вероятностный подход. Пусть $\mathcal{M} = (\Sigma, \text{И})$ — ненадёжная схема Σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, переходящая под действием источника неисправностей И в состояния $\Sigma = \Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(t)}$, в которых реализуются функции $F = F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(t)}$ соответственно, определённые на множестве наборов $\mathcal{N} = \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$. Пусть далее вероятность того, что схема Σ находится в состоянии $\Sigma^{(i)}$, известна и равна π_i, где $i = 1, \ldots, t$, $0 \leqslant \pi_i \leqslant 1$ и $\sum_{i=1}^{t} \pi_i = 1$. Введём следующие величины, характеризующие ненадёжность схемы Σ в модели $\mathcal{M}$:

$$\xi(\mathcal{M}) = \sum_{\substack{F^{(j)} \neq F \\ 2 \leqslant j \leqslant t}} \pi_j, \tag{3.1}$$

$$\xi(\mathcal{M}, \beta) = \sum_{\substack{F^{(j)}(\beta) \neq F(\beta) \\ 2 \leqslant j \leqslant t}} \pi_j, \tag{3.2}$$

где $\beta \in \mathcal{N}$, а затем положим

$$\eta(\mathcal{M}) = \max_{\beta \in \mathcal{N}} \xi(\mathcal{M}, \beta), \tag{3.3}$$

$$q_{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n) = \xi\big(\mathcal{M}, (x_1, \ldots, x_n)\big). \tag{3.4}$$

Замстим, что величина $\xi(\mathcal{M})$ ($\xi(\mathcal{M}, \beta)$) задаёт вероятность того, что схема Σ реализует функцию, не равную F (соответственно не равную F на наборе β), и поэтому

$$\eta(\mathcal{M}) \leqslant \xi(\mathcal{M}) \leqslant p\eta(\mathcal{M}), \tag{3.5}$$

откуда следует, в частности, что $\eta(\mathcal{M}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi(\mathcal{M}) = 0$. Схема Σ считается *абсолютно надёжной* в модели $\mathcal{M}$, если $\eta(\mathcal{M}) = 0$ (или $\xi(\mathcal{M}) = 0$). Это означает, что все состояния схемы Σ, имеющие положительную вероятность, эквивалентны Σ. Функция $q_{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n)$ называется *функцией вероятности неправильного срабатывания схемы* Σ. В дальнейшем, при записи введённых величин вместо пары $\mathcal{M} = (\Sigma, \text{И})$ будем писать просто Σ, если из контекста ясно, какой источник неисправностей имеется в виду.

Рассмотрим вероятностный подход на примере ненадёжных СФЭ над базисом $\text{Б} = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где ФЭ $\mathcal{E}_i$ реализует булеву функцию $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$. Пусть для каждого i, $i = 1, \ldots, b$, известно *распределение режимов работы ФЭ* $\mathcal{E}_i$, то есть для каждого j, $j = 1, \ldots, 2^{2^{k_i}}$, известна и равна $\pi_{i,j}$

вероятность того, что ФЭ $\mathcal{E}_i$ реализует j-ю булеву функцию от булевых переменных $x_1, \ldots, x_{k_i}$ (если считать, что все булевы функции от переменных $x_1, \ldots, x_{k_i}$ упорядочены в соответствии с номерами их столбцов значений). При нахождении ненадёжности схемы Σ над базисом Б будем считать, что все её ФЭ переходят в свои состояния независимо друг от друга и что любое состояние СФЭ Σ определяется состояниями ФЭ Σ. В соответствии с этим на основе введённых выше соотношений (3.1)–(3.4) можно найти значения ненадёжности $\xi(\Sigma)$ и $\eta(\Sigma)$ для СФЭ Σ, а также распределение режимов её работы и функцию $q_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$.

Предельно

Считается, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ допускает *сколь угодно надёжную реализацию* в базисе Б, если для любого ε, $\varepsilon > 0$, существует СФЭ Σ над Б, которая реализует f и для которой $\xi(\Sigma) < \varepsilon$. Повышение надёжности при реализации ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ возможно, если в базисе Б имеется абсолютно надёжный ФЭ $\mathcal{E}_i$, реализующий функцию голосования $H(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Действительно, если СФЭ Σ реализует f и $\eta(\Sigma) = \varepsilon$, то для ненадёжности СФЭ $\Sigma^{(1)}$, показанной на рис. 3.1a, которая тоже реализует f, имеет место равенство

$$\eta\big(\Sigma^{(1)}\big) = \theta(\varepsilon) = 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$$

(график функции $\tau = \theta(\varepsilon)$ показан на рис. 3.1b).

Заметим, что $\theta(0) = 0$, $\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, что первые две производные функции $\theta(\varepsilon)$ на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ неотрицательны, причём $\theta''(0) = \theta''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ и $\theta'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, $\theta'(0) > 0$, и что $\theta(\varepsilon) < \varepsilon$, если $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Поэтому, рекурсивно применяя указанную процедуру повышения надёжности к СФЭ $\Sigma^{(k)}$, результатом которой является СФЭ $\Sigma^{(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, построим последовательность СФЭ $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(k)}, \ldots$, реализующих f, для которой

$$\eta(\Sigma^{(k)}) \leqslant \theta\big(\eta(\Sigma^{(k-1)})\big) \leqslant \theta_k\big(\eta(\Sigma)\big) \underset{k\to\infty}{\to} 0,$$

14

1.5 → 1.14

$(p_1p_2p_3) \to p =$ макс.

Построение ПНСФ

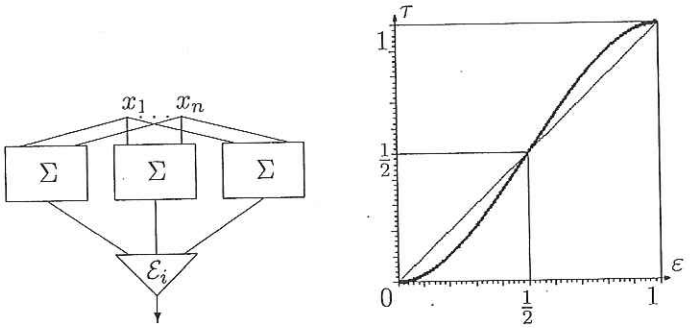
с $\hat{Б}_0 = \{\mathcal{E}_\&, \mathcal{E}_\vee, \mathcal{E}_\neg\}$

с η-надёжн. $\mathcal{E}_\varphi$ $< \frac{1}{2}$

$\hat{Б}_0(p)$ ⊖ !

$\hat{Б}_0^{(p)}$ ⊕ ?

$Б_0$



(a) (b)

Рис. 3.1

Б

где $\theta_0(\varepsilon) = \varepsilon$, $\theta_k(\varepsilon) = \theta(\theta_{k-1}(\varepsilon))$. Заметим, что при этом

$$\theta_k(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{3}(3\varepsilon)^{2^k},$$

если $\varepsilon < \frac{1}{6}$. Заметим также, что СФЭ $\Sigma^{(k)}$ содержит 3^k подсхем вида Σ и $1 + 3 + \ldots + 3^{k-1} = \frac{3^k-1}{2}$ ФЭ $\mathcal{E}_i$.

Аналогичные построения и оценки применимы и для повышения ξ-ненадёжности СФЭ.

Пусть базис Б допускает построение сколь угодно надёжных СФЭ для любой ФАЛ. Определим в этом случае для произвольной ФАЛ f и любого ε, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, функционал сложности $\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(f, \varepsilon)$, равный минимальной из сложностей тех СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$, которые реализуют ФАЛ f и для которых $\eta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Затем введём соответствующую функцию Шеннона

$$\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(n, \varepsilon) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(f, \varepsilon),$$

для которой (см. [13, гл. IV, §4, теорема 4.3]) будет справед-

лива нижняя мощностная оценка

$$\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}(n,\varepsilon) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \tag{3.6}$$

где $\rho_{\text{Б}}$ — приведённый вес базиса Б. Заметим, что в соответствии с высказанными ранее соображениями для любого действительного p, $0 \leqslant p < \frac{1}{2}$, указанным свойством полноты обладает базис $\widehat{\text{Б}}_p$, состоящий из ФЭ $\mathcal{E}_{\&}$, $\mathcal{E}_{\vee}$, $\mathcal{E}_{\neg}$ и $\mathcal{E}_H$ веса 1 с базисными ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$, $\overline{x}_1$ и $H(x_1, x_2, x_3)$ соответственно, для которых $\eta(\mathcal{E}_\varphi) = p$, если $\varphi \in \{\&, \vee, \neg\}$, и $\eta(\mathcal{E}_H) = 0$. Следовательно, в силу (3.6)

$$L^{\mathrm{C}}_{\widehat{\text{Б}}_p}(n,\varepsilon) \gtrsim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}, \tag{3.7}$$

так как $\rho_{\widehat{\text{Б}}_p} = \frac{1}{2}$.

Теорема 3.1. *Для $n = 1, 2, \ldots$ существует стремящаяся к нулю неотрицательная последовательность $\varepsilon = \varepsilon(n)$ такая, что*

$$L^{\mathrm{C}}_{\widehat{\text{Б}}_p}\big(n, \varepsilon(n)\big) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n},$$

Доказательство. Требуемая нижняя асимптотическая оценка теоремы вытекает из (3.7).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки теоремы возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$, сложность которой асимптотически не больше, чем $\frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}$, а η-ненадёжность не превосходит $\varepsilon(n)$.

Для этого в соответствии с асимптотически наилучшим методом синтеза СФЭ в произвольном базисе Б (см. [13, гл. IV, §4, теорема 4.1]) выберем для базиса $\text{Б} = \widehat{\text{Б}}_p$ натуральные параметры m, t, s и r такие, что

$$s \leqslant 2^m, \quad r = 2t + 1, \quad \frac{2^m}{s} \leqslant r \leqslant \frac{2^m}{s} + 2, \quad m < n. \tag{3.8}$$

Построим, далее, из t ФЭ $\mathcal{E}_H$ абсолютную формулу $\mathcal{F}$ с r входами, которая реализует ФАЛ $\varphi(y_1, \ldots, y_r)$, и пусть G, $G \subseteq P_2(n)$, — φ-УМ порядка m такое, что $|G| \leqslant r \cdot 2^s$.

Возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и, полагая, как обычно, $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_m)$ представим её в следующем виде

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-m}} K_{\sigma''}(x') \cdot f_{\sigma''}(x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-m}} K_{\sigma''}(x') \cdot \varphi\big(g^{(1)}_{\sigma''}, \ldots, g^{(r)}_{\sigma''}\big), \tag{3.9}$$

где $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$, $K_{\sigma''}(x'')$ — элементарная конъюнкция ранга $(n-m)$ от БП x'', которая равна 1 на наборе σ'', а ФАЛ $g^{(1)}_{\sigma''}, \ldots, g^{(r)}_{\sigma''}$ выбраны из G так, чтобы

$$f_{\sigma''}(x') = \varphi\big(g^{(1)}_{\sigma''}, \ldots, g^{(r)}_{\sigma''}\big). \tag{3.10}$$

Построим СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\widehat{\mathrm{Б}}_p}$, реализующую ФАЛ f в соответствии с (3.9) и состоящую из следующих подсхем:

1) подсхемы Σ_G над базисом $\mathrm{Б}_0 = \{\mathcal{E}_{\&}, \mathcal{E}_{\vee}, \mathcal{E}_{\neg}\}$, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{G}$ от БП x' путём моделирования π-схем, построенных по совершенным ДНФ ФАЛ из G на базе контактного дерева от БП x', и для которой

$$L(\Sigma_G) \leqslant 4(2^m - 1) \cdot r \cdot 2^s \leqslant r \cdot 2^{m+s+2}; \tag{3.11}$$

2) подсхемы Σ', которая содержит СФЭ Σ_G в качестве своей подсхемы, для каждого набора σ'', $\sigma'' \in B^{n-m}$, включает в себя формулу $\mathcal{F}$ из t ФЭ $\mathcal{E}_H$, реализующую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ в соответствии с (3.10), и имеет сложность

$$L(\Sigma') \leqslant t \cdot 2^{n-m} + L(\Sigma_G); \tag{3.12}$$

3) подсхемы Σ'', представляющей собой мультиплексорную СФЭ порядка $(n-m)$ и сложности

$$L(\Sigma'') \leqslant 4 \cdot 2^{n-m} \tag{3.13}$$

над базисом $Б_0$, адресными входами которой являются БП x'', а информационные входы присоединены к выходам СФЭ Σ' в соответствии с (3.9).

Таким образом, учитывая (3.8)–(3.13), получим

$$\begin{aligned} L_H(\Sigma_f) \leqslant t \cdot 2^{n-m} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{2^m}{s}+1\Big) \cdot 2^{n-m} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{s} + 2^{n-m-1}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} L_{Б_0}(\Sigma_f) \leqslant 4 \cdot 2^{n-m} + \Big(\frac{2^m}{s}+1\Big) \cdot 2^{m+s+1} \leqslant \\ \leqslant 4 \cdot 2^{n-m} + \frac{2^{2m+s+1}}{s} + 2^{m+s+1}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Будем теперь повышать надёжность СФЭ Σ_f с помощью абсолютно надёжного ФЭ $\mathcal{E}_H$ и тех приёмов, которые описаны в начале параграфа. Найдём, сначала, натуральное $\hat{l}$, для которого $\theta_{\hat{l}}(p) = \hat{p} < \frac{1}{6}$, и построим СФЭ $\widehat{\Sigma}_f$ заменой каждого ФЭ $\mathcal{E}_\varphi$, $\varphi \in Б_0$, в СФЭ Σ_f схемой (макроэлементом) $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi = \mathcal{E}_\varphi^{(\hat{l})}$. Пусть, далее, l — натуральный параметр, а СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ получается из СФЭ $\widehat{\Sigma}_f$ заменой каждого её макроэлемента $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi$, $\varphi \in Б_0$, схемой $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi^{(l)}$.

Схема $\widetilde{\Sigma}_f$ реализует, очевидно, ФАЛ f, а из неравенств (3.14), (3.15) и $\hat{p} < \frac{1}{6}$ с учётом приведённых в начале параграфа соотношений, касающихся повышения надёжности, следует, что

$$L(\widetilde{\Sigma}_f) \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{s} + O\Big(3^l\Big(2^{n-m} + \frac{2^{s+2m}}{s}\Big)\Big), \tag{3.16}$$

$$\eta(\widetilde{\Sigma}_f) = O\Big(3^l\Big(2^{n-m} + \frac{2^{s+2m}}{s}\Big) \cdot 2^{-2^l}\Big).$$

Из полученных оценок следует, что при достаточно больших значениях n и

$$l = \lceil \log n \rceil\,,\ m = 2l + \lceil 2\log n \rceil\,,\ s = \lceil n - 3m - l \cdot \log 3 \rceil \quad (3.16)$$

условия (3.7) будут выполнены, а построенная СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ будет удовлетворять требуемым соотношениям

$$L(\widetilde{\Sigma}_f) \lesssim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}, \qquad \eta(\widetilde{\Sigma}_f) = o(1).$$

Теорема доказана. □

§4 Самокорректирующиеся СФЭ в базисах из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования, асимптотически наилучшие методы их синтеза

Пусть базис $Б = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, имеет вес $\mathcal{L}_i$ и реализует ФАЛ $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$ с η-ненадёжностью η_i, $0 \leqslant \eta_i < \frac{1}{2}$. При этом ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i \in [1, b]$, в соответствии с §3 считается (абсолютно) надёжным, если $\eta_i = 0$ и *ненадёжным* в противном случае. Предполагается, что ненадёжный ФЭ $\mathcal{E}_i$ при выходе из строя может переходить в любое из $2^{2^{k_i}}$ неисправных состояний, в которых реализуются все различные ФАЛ от его входных БП.

Будем говорить, что СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{Б}^{C}$, *корректирует d ошибок*, если она не изменяет своё функционирование при выходе из строя любых не более, чем d, ненадёжных элементов. Заметим, что если в базисе Б возможна (см. §3) сколь угодно надёжная реализация произвольной ФАЛ, то для любого натурального d и любой ФАЛ в нём возможно построение СФЭ, которая реализует эту ФАЛ и корректирует d ошибок.

В указанном случае для произвольной ФАЛ f и натурального d определим функционал сложности $\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(f,d)$, равный минимальной сложности тех СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$, которые реализуют ФАЛ f и корректируют d ошибок. Затем введём соответствующую функцию Шеннона

$$\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(n,d) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(f,d),$$

для которой аналогично (3.5) будет справедлива нижняя мощностная оценка

$$\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(n,d) \gtrsim \rho_{\mathrm{Б}} \frac{2^n}{n}. \tag{4.1}$$

Будем рассматривать далее базис $\widehat{\mathrm{Б}}$, состоящий из ФЭ $\mathcal{E}_{\&}$, $\mathcal{E}_{\vee}$, $\mathcal{E}_{\neg}$ и $\mathcal{E}_H$ веса 1, из которых абсолютно надёжным является только ФЭ $\mathcal{E}_H$, а также базис $\breve{\mathrm{Б}}$, который отличается от $\widehat{\mathrm{Б}}$ лишь тем, что «вес» $\mathcal{L}_H$ ФЭ $\mathcal{E}_H$ в нём больше двух. Поскольку в каждом из этих базисов возможна сколь угодно надёжная реализация произвольной ФАЛ (см. §3), то для них определены введённые выше функционалы сложности и функции Шеннона, которые в силу (4.1) удовлетворяют асимптотическим оценкам

$$L^{\mathrm{C}}_{\widehat{\mathrm{Б}}}(n,d) \gtrsim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}, \qquad \mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\breve{\mathrm{Б}}}(n,d) \gtrsim \frac{2^n}{n}, \tag{4.2}$$

так как $\rho_{\widehat{\mathrm{Б}}} = \rho_{\breve{\mathrm{Б}}} = 1$.

Для построения самокорректирующихся СФЭ в базисах $\widehat{\mathrm{Б}}$, $\breve{\mathrm{Б}}$ воспользуемся конструкциями §3. Так, индукцией по $l = 1, 2, \ldots$ легко показать, что СФЭ $\Sigma^{(l)}$, построенная по СФЭ Σ, корректирует $(2^l - 1)$ ошибок.

16.1

Теорема 4.1. *Для $n = 1, 2, \ldots$ и любой натуральной последовательности $d = d(n)$, такой что $\log d(n) = o(n)$, справедливо асимптотическое равенство*

$$L^{\mathrm{C}}_{\widehat{\mathrm{Б}}}(n, d(n)) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

$\widehat{\mathrm{Б}}_0$

Доказательство. Требуемая нижняя асимптотическая оценка функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}_{\widehat{\mathrm{Б}}}(n,d)$ вытекает из (4.2).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки данной функции Шеннона возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$, которая корректирует d ошибок и имеет сложность асимптотически не превосходящую $\frac{2^{n-1}}{n}$.

Покажем, что в качестве искомой СФЭ можно взять СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$, построенную при доказательстве теоремы 3.1, если считать, что $\hat{l} = 0$ и $l = \lceil \log(d+1) \rceil$, а остальные параметры конструкции выбраны согласно (3.16). Действительно, полученная таким образом СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ состоит из абсолютно надёжных ФЭ $\mathcal{E}_H$ и макроэлементов вида $\mathcal{E}^{(l)}_{\varphi}$, $\varphi \in \mathrm{Б}_0$, каждый из которых корректирует $2^l - 1 \geqslant d$ ошибок. При этом сложность СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ в силу (3.15) будет асимптотически не больше, чем $\frac{2^{n-1}}{n}$.

Теорема доказана. □

Шаром радиуса r с центром в точке $\alpha \in B^n$ называется множество всех наборов длины n, расстояние от которых до α не превосходит r. Обозначим через $S_r(n)$ число точек (наборов длины n) в шаре радиуса r. Точки шара радиуса r — это его центр, множество наборов, отличающихся от центра в одной координате, — их C^1_n, множество наборов, отличающихся от центра в двух координатах, — их C^2_n, и т. д. Следовательно,

$$S_r(n) = C^0_n + \ldots + C^r_n.$$

Определим функцию $M_r(n)$ как максимальное число попарно не пересекающихся шаров радиуса r, укладывающихся в B^n. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Для любых натуральных n, r ($r \leqslant n$) максимальное число попарно не пересекающихся шаров радиуса r, которые можно разместить в кубе B^n, не меньше, чем $2^n/S_{2r}(n)$.*

Доказательство. Будем размещать требуемым образом шары радиуса r в кубе B^n. Выберем в качестве центра первого шара произвольный набор α_1 куба B^n. Для выбора набора α_2 в качестве центра второго шара запрещено $S_{2r}(n)$ точек, так как запрещены все точки, находящиеся от α_1 на расстоянии меньшем чем $2r+1$. Пусть уже выбраны наборы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, тогда для выбора набора α_{k+1} запрещено точек не больше чем $k \cdot S_{2r}(n)$, то есть, если $k \cdot S_{2r}(n) < 2^n$, то можно выбрать α_{k+1}. Пусть таким образом выбрано m наборов, а выбор набора в качестве центра очередного шара невозможен, тогда $m \cdot S_{2r}(n) \geqslant 2^n$, то есть

$$M_r(n) \geqslant m \geqslant \frac{2^n}{S_{2r}(n)}.$$

Лемма доказана. □

Теорема 4.2. *Для $n = 1, 2, \ldots$ и любой натуральной последовательности $d = d(n)$, такой что $d(n) = o(n/\log n)$, справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{L}^{\text{С}}_{\text{Б}}(n, d(n)) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Требуемая нижняя асимптотическая оценка функции Шеннона $\mathcal{L}^{\text{С}}_{\text{Б}}(n, d)$ вытекает из (4.2).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки данной функции Шеннона возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ Σ_f, которая корректирует d ошибок и имеет сложность, асимптотически не превосходящую $\frac{2^{n-1}}{n}$.

Выберем натуральные параметры m, N и R такие, что

$$m < n,\ N = 2^m,\ R = N + 2d \cdot (m+1) \leqslant 2^{m+1}, \qquad (4.3)$$

для которых, очевидно,

$$2^N = 2^N \cdot \frac{2^{2d(m+1)}}{(2^{m+1})^{2d}} \leqslant \frac{2^R}{R^{2d}} \leqslant \frac{2^R}{C_R^0 + \ldots + C_R^{2d}},$$

то есть с учётом леммы 4.1

$$2^N \leqslant M_d(R). \qquad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что существует такое инъективное отображение ψ, которое переводит наборы куба B^N в центры непересекающихся шаров радиуса d куба B^R. На его основе определим отображение ψ^{-1}, переводящее произвольный набор β, $\beta \in B^R$, в такой набор α, $\alpha \in B^N$, для которого набор $\psi(\alpha)$ является ближайшим к β центром одного из указанных шаров. Заметим, что при этом $\psi^{-1}(\gamma) = \alpha$ для любого набора γ, принадлежащего шару с центром $\psi(\alpha)$.

Положим, как обычно, $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ и представим ФАЛ в виде

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)} K_{\sigma'}(x') \cdot f_{\sigma'}(x''), \qquad (4.5)$$

где $K_{\sigma'}(x') = x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\sigma_m}$ и $f_{\sigma'}(x'') = f(\sigma', x'')$.

Полагая, ~~как обычно~~, что

$$m = m(n) = o(n) \text{ и } d \leqslant 2^{\ell}/, \qquad (4.6)$$

где ℓ – некоторый параметр,

построим СФЭ Σ_f из следующих подсхем:

1) подсхемы Σ'' над базисом Б$_0$, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{F}'' = \left(f_{\tilde{0}}(x''), \ldots, f_{\tilde{1}}(x'')\right)$ из $P_2^R(x'')$, получена

асимптотически наилучшим методом [13] и для которой в силу (4.6)

$$\mathcal{L}(\Sigma'') \lesssim R\frac{2^{n-m}}{n}; \tag{4.7}$$

2) подсхемы Σ_ψ над базисом $Б_0^{(l)}$ из макроэлементов $\mathcal{E}_\&^{(l)}$, $\mathcal{E}_\vee^{(l)}$, $\mathcal{E}_\neg^{(l)}$, которая реализует систему ФАЛ $\psi^{-1}(y_1, \ldots, y_R)$, получена методом Шеннона [13] и имеет сложность

$$\mathcal{L}(\Sigma_\psi) = O\Big(2^m \cdot \frac{2^R}{R} \cdot 3^l\Big), \tag{4.8}$$

а её входы присоединены в СФЭ Σ_f к выходам подсхемы Σ'' с теми же номерами;

3) подсхемы Σ', представляющей собой мультиплексорную СФЭ порядка m и сложности

$$\mathcal{L}(\Sigma') = O(3^l \cdot 2^m) \tag{4.9}$$

над базисом $Б_0^{(l)}$, адресными входами которой являются БП x', а информационные входы $(u_0, \ldots, u_{2^m-1})$ присоединены к выходам подсхемы Σ_ψ с номерами $1, \ldots, 2^m$ соответственно.

Из построения СФЭ Σ_f и отмеченных выше свойств отображений ψ, ψ^{-1} следует, что она реализует ФАЛ f, корректирует d ошибок, а её сложность в силу (4.7)–(4.9) удовлетворяет неравенству

с учетом (4.6),

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \lesssim R \cdot \frac{2^{n-m}}{n} + O\Big(3^l \cdot 2^m \cdot \frac{2^R}{R}\Big).$$

Из полученной оценки следует, что при достаточно больших значениях n и

$$m = \lfloor \log n \rfloor - 1, \qquad l = \lceil \log(d+1) \rceil$$

условия (4.3) и (4.6) будут выполнены, а построенная СФЭ Σ_f будет удовлетворять всем требованиям теоремы.

Теорема доказана. □

Литература

[1] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.

[2] *Андреев А. Е.* О сложности реализации частичных булевых функций схемами из функциональных элементов. Дискретная математика, т. 1 (1989), №4. С. 36-45.

[3] *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики. М.: МГУ, 2004

[4] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.

[5] *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.

[6] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: МГУ, 1984.

[7] *Нигматулин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.

[8] *Яблонский С. В.* Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем. Проблемы кибернетики, вып. 2. - М.:Физматгиз, 1959. С. 75-121 (См. также Избранные труды С.В. Яблонского. М.: МАКС Пресс, 2004.).

[9] *Яблонский С. В.* Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.

[10] *Кричевский Р. Е.* О сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих одну последовательность булевых функций. Проблемы кибернетики, вып. 12. М.: Наука, 1964. С. 45-55.

[11] *Ложкин С. А.* Об одном методе получения нижних оценок сложности контактных схем и о некоторых минимальных схемах для линейных функций. Сб. трудов семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1997. С. 113-115.

[12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов. Математические вопросы кибернетики, вып. 6 М.: Наука, 1996. С. 189 - 214.

[13] *Ложкин С. А.* О глубине функций алгебры логики в произвольном полном базисе. Вестник МГУ. Математика. Механика, 1996, №2. С. 80-82.

[14] *Ложкин С. А., Кошкин М.* А. О сложности реализации некоторых систем функций алгебры логики контактными многополюсниками. ДАН СССР, т. 298 (1988), №4. С. 807-811.

[15] *Шоломов Л. А.* О реализации недоопределенных булевых функций схемами их функциональных элементов. Проблемы кибернетики, вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 215 - 226.

[16] *Shannon C. E.* The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell System Technical Journal. — Vol. 28, No. 1. — 1949. — P. 59–98. (Русский перевод: *Шеннон К.* Синтез двухполюсных переключательных схем // Работы по теории информации и кибернетике. — М: ИЛ, 1963. — С. 59–105.)