

Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Весенний семестр 2014–2015 уч. г.
группы 320–328, 318

лектор — профессор С. А. Ложкин
(lozhkin@cs.msu.su)

Информационная поддержка курса по адресам:

[http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_\(3-й_поток\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток))

[http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_\(318,_418_группы\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(318,_418_группы))

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ

Утверждение 1.1. Совершенная ДНФ ФАЛ f , $f \neq 0$, $f \in P_2(n)$, является единственной ДНФ от БП $X(n)$, которая реализует эту ФАЛ, тогда и только тогда, когда во множестве N_f нет соседних наборов.

Следствие. Совершенная ДНФ ФАЛ ℓ , $\bar{\ell}$, является единственной ДНФ этой ФАЛ от БП $X(n)$.

2. Сокращенная ДНФ и способы ее построения

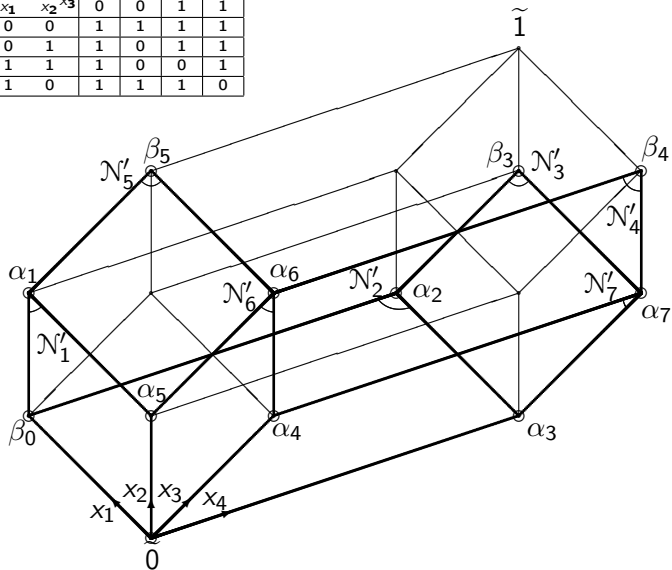
Утверждение 2.1. Пусть \mathcal{A}' и \mathcal{A}'' — сокращенные ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а ДНФ \mathcal{A} без поглощений ЭК получается из формулы $\mathcal{A}' \cdot \mathcal{A}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда \mathcal{A} — сокращенная ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.

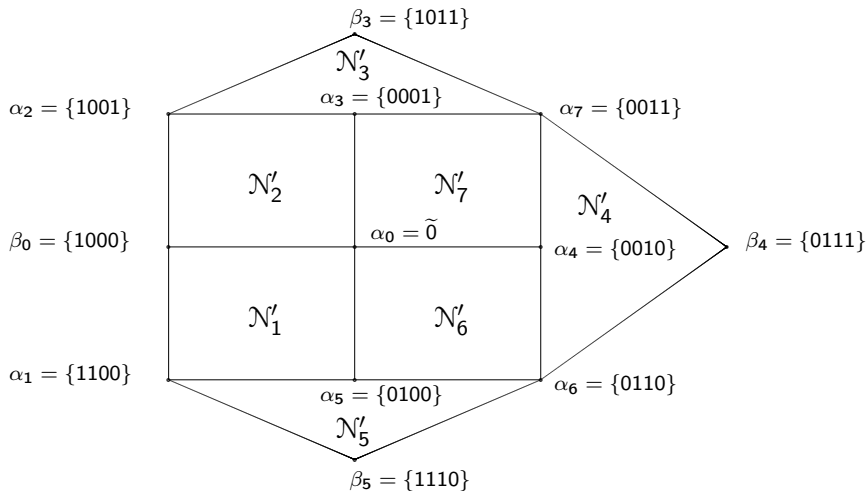
Следствие. Если ДНФ \mathcal{A} без поглощений ЭК получается из КНФ \mathcal{B} ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то \mathcal{A} — сокращенная ДНФ ФАЛ f .

Утверждение 2.2. ДНФ без поглощений ЭК является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

Следствие. Из любой ДНФ \mathcal{A} ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.

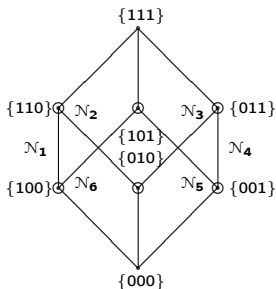
x_1	x_2	x_3	x_4	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0





$$\mathfrak{A}'_1 = K'_1 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5, \quad \mathfrak{A}'_2 = K'_2 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5.$$

$$g\{x_1, x_2, x_3\} = \underbrace{x_1\bar{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{x_2\bar{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_2}_{K_3} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_3}_{K_4} \vee \underbrace{\bar{x}_2x_3}_{K_5} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2}_{K_6}.$$



$$\bar{N}_g = \{\{000\}, \{111\}\},$$

$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1.$$

3. Тупиковые ДНФ, ядро и
ДНФ пересечение тупиковых.
ДНФ Квайна, критерий
вхождения простых
импликант в ДНФ сумма
тупиковых, его локальность

Утверждение 3.1. Дизъюнктивная нормальная форма $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f , которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.

Следствие. Сокращенная ДНФ ФАЛ f является ее единственной тупиковой ДНФ тогда и только тогда, когда f — ядровая ФАЛ, т.е. все ее максимальные грани входят в ядро.

Утверждение 3.2. Простая импликанта K ФАЛ f входит в ДНФ ΣT тогда и только тогда, когда грань N_K не является регулярной гранью этой ФАЛ.

4. Особенности ДНФ линейных и монотонных функций. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ

Утверждение 4.1. Сокращенная ДНФ \mathfrak{A} монотонной ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид:

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\beta \in N_f^+} K_{\beta}^+(x_1, \dots, x_n).$$

При этом все наборы из N_f^+ являются ядровыми точками ФАЛ f .

Следствие. Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.

Утверждение 4.2. Функция покрытия $F(y_1, \dots, y_p)$ матрицы M , $M \in B^{p,s}$, без нулевых столбцов задается КНФ вида:

$$F(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^s \left(\bigvee_{\substack{1 \leq i \leq p \\ M\langle i,j \rangle = 1}} y_i \right).$$

Следствие. В результате раскрытия скобок и приведения подобных из этой КНФ можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M .

5. Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о протыкающих наборах.

Использование градиентного алгоритма для построения ДНФ

Утверждение 5.1 Пусть для действительного γ , $0 < \gamma \leq 1$, в каждом столбце матрицы M , $M \in B^{p,s}$, имеется не меньше, чем $\gamma \cdot p$, единиц. Тогда покрытие матрицы M , получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем

$$\left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma},$$

$$\text{где } \ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x \geq 1; \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Утверждение 5.2 При любых натуральных n и m , $m \leq n$, в кубе B^n всегда найдется подмножество мощности не более, чем $n \cdot 2^m$, протыкающее все грани ранга m .

6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функций Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ

Утверждение 6.1 Для любого $n, n \in \mathbb{N}$,
имеют место соотношения

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, R(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Утверждение 6.2 Для почти всех ФАЛ f ,
 $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства

$$\lambda(f) \leq \frac{3}{4} 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n/2})),$$

$$\lambda(f) \leq \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n/2})).$$

7. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров. Теорема Ю. И. Журавлева о ДНФ сумма минимальных

Утверждение 7.1 Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geq 4$, вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \dots \oplus x_n),$$

где $\bar{N}_g = \{(000), (111)\}$, равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).

Следствие

$$\tau(n) \geq 5^{2^{n-4}}, \quad \mu_n(n) \geq 2^{2^{n-4}}.$$

Утверждение 7.2

$$\lambda_{\text{сокр.}}(n) \geq e_1 \frac{3^n}{n},$$

где e_1 — некоторая константа.

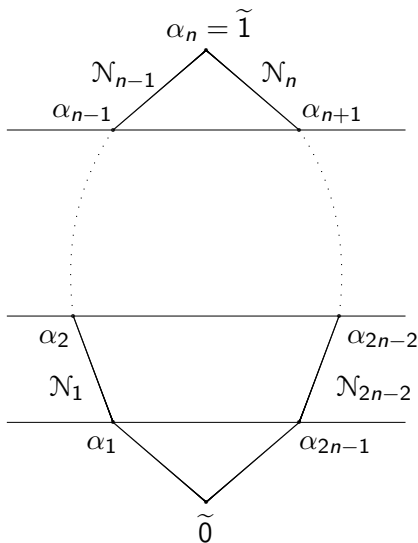


Рис.: цепная ФАЛ длины $(2n - 2)$ в кубе B^n

Утверждение 7.3 При любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'' , имеющие общую простую импликанту K , которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.

Замечание Из теоремы следует, что критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣM не имеет такого локального характера, как критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣT .

Замечание Известно, что при $n \geq 14$ в $P_2(n)$ имеется цепная ФАЛ четной длины t , $t \geq 2^{n-11} - 4$, на основе которой справедливость теоремы можно установить для окрестности порядка $(\frac{t}{2} - 2)$.

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

8. Формулы и способы их задания, эквивалентность формул и функционалы их сложности. Оптимизация подобных формул по глубине

Утверждение 8.1 Для формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$, выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1 \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^{D(\mathcal{F})},$$

где $L_{\&, \vee}(\mathcal{F})$ — число ФС $\&$ и \vee в формуле \mathcal{F} .

Следствие

$$D(\mathcal{F}) \geq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil.$$

Утверждение 8.2 Для любой формулы \mathcal{F} с поднятыми отрицаниями из \mathcal{U}^Φ существует подобная ей формула $\check{\mathcal{F}}$ такая, что

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \text{Alt}(\mathcal{F}).$$

Следствие 1. Для любой ЭК или ЭД K существует подобная ей формула \check{K} такая, что

$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil,$$

которая, минимальна по глубине.

Следствие 2. Для любой ДНФ или КНФ \mathfrak{A} существует подобная ей формула $\check{\mathfrak{A}}$ такая, что

$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leq \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

9. Схемы из функциональных элементов и операции их приведения. Оценка числа формул и схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Утверждение 9.1 Для приведенной СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^C$, с одним выходом, выполняются неравенства

$$R(\Sigma) \leq L_{\&, \vee}(\Sigma) + 1 \leq L(\Sigma) + 1 \leq 2^{D(\Sigma)},$$

где $L_{\&, \vee}$ — число ФЭ $\&$ и \vee в Σ .

Утверждение 9.2 Для любых натуральных n , L , D выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}^\Phi(L, n)| &\leq (10n)^{L+1}, \\ \|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| &\leq (8n)^{L+1}, \\ \|\mathcal{U}^\Phi[D, n]\| &\leq (8n)^{2^D}. \end{aligned}$$

Следствие Число попарно не квазиизоморфных формул с поднятыми отрицаниями ранга R от БП x_1, \dots, x_n не больше, чем $(12n)^R$.

Утверждение 9.3 Для любых натуральных n и L выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L + n))^{L+1}.$$

10. Контактные схемы и π -схемы, моделирование формул и π -схем. Оценка числа контактных схем и π -схем, особенности функционирования многополюсных схем

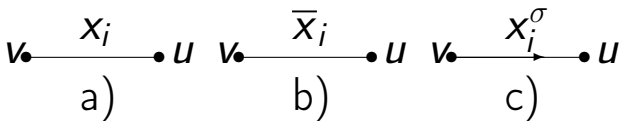


Рис.: типы контактов

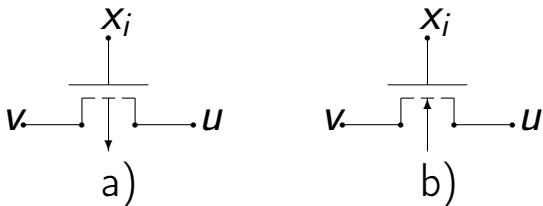
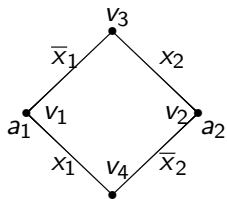
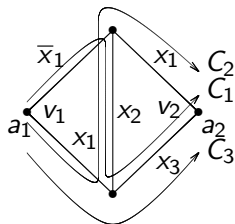


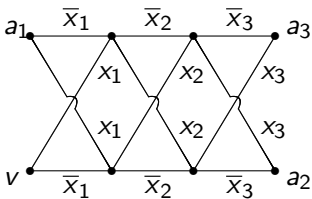
Рис.: физическая интерпретация контактов



a)



b)



c)

Рис.: некоторые КС от БП x_1, x_2, x_3

Утверждение 10.1 Любой π -схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу \mathcal{F} из \mathcal{U}^Φ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.

Утверждение 10.2 При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (12n)^L.$$

Утверждение 10.3 При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L.$$

11 Эквивалентные
преобразования формул с
помощью тождеств. Полнота
системы основных тождеств
для эквивалентных
преобразований формул
базиса $\{\&, \vee, \neg\}$

$$\tau^{\text{OCH}} = \{t_{\&}^{\text{M}}, t_{\neg}^{\text{M}}, t_{\&}^{\text{A}}, t_{\&}^{\text{K}}, t_{\&}^{\text{OP}}, t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{1,\&}^{\text{PK}}, t_{0,\&}^{\text{PK}}\},$$

$$\tau^{\text{A}} = \{t_{\&}^{\text{A}}, t_{\vee}^{\text{A}}\},$$

$$\tau^{\text{K}} = \{t_{\&}^{\text{K}}, t_{\vee}^{\text{K}}\},$$

$$\tau^{\text{OP}} = \{t_{\&}^{\text{OP}}, t_{\vee}^{\text{OP}}\},$$

$$\tau^{\text{D}} = \{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{\vee,\&}^{\text{D}}\},$$

$$\tau^{\text{PK}} = \{t_{0,\&}^{\text{PK}}, t_{1,\&}^{\text{PK}}, t_{0,\vee}^{\text{PK}}, t_{1,\vee}^{\text{PK}}\},$$

$$\widetilde{\tau}^{\text{OCH}} = \{\tau^{\text{M}}, \tau^{\text{A}}, \tau^{\text{K}}, \tau^{\text{OP}}, \tau^{\text{D}}, \tau^{\text{PK}}, t^{\text{P}}\}.$$

Утверждение 11.1 Система $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$
выводима из системы $\tau^{\text{осн}}$.

Утверждение 11.2 Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$, реализующую ФАЛ f , с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.

Утверждение 11.3 Система $\tau^{\text{осн}}$ —
полная система тождеств.

12. Эквивалентные
преобразования схем из
функциональных элементов и
моделирование с их помощью
формульных преобразований.

Моделирование
эквивалентных
преобразований формул и
схем в различных базисах,
теорема перехода

Утверждение 12.1 Если τ — конечная полная система тождеств для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ , то $\{\underline{\tau}, \tau^C, \tau^B\}$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из \mathcal{U}_B^C

Следствие Система тождеств $\{\underline{\tau}^{\text{осн}}, \tau^B, \tau^C\}$ — КПСТ для ЭП СФЭ из \mathcal{U}^C .

Утверждение 12.2 Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ , а P' и P — системы тождеств для перехода от базиса B к базису B' и от базиса B' к базису B соответственно. Тогда система тождеств $\{P'(\tau), P(P)\}$ является КПСТ для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ .

Следствие Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из \mathcal{U}^Φ указанным в утверждении способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе B .

13. Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщённых тождеств

Утверждение 13.1 Имеет место выводимость $\{t_1-t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \vdash \{t_7-t_{11}\}$.

Утверждение 13.2 При $n \geq 2$ имеет место выводимость $\tau_n \vdash \tau^{(n)}$.

14. Полнота системы
основных тождеств и
отсутствие конечной полной
системы тождеств в классе
контактных схем

Утверждение 14.1 Для любой КС Σ , где $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{U}^K$, и любой эквивалентной Σ КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \xrightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}$.

Утверждение 14.2 Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП x_1, \dots, x_n существует ЭП вида $\Sigma' \xRightarrow{\tau_n} \Sigma''$.

Следствие Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из \mathcal{U}^K от БП x_1, \dots, x_n .

Следствие Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из \mathcal{U}^K .

Утверждение 14.3 Если

$\Sigma' (x_1, \dots, x_n) \xRightarrow{\{t_1-t_5\}} \Sigma'' (x_1, \dots, x_n)$, то

$\Theta (\Sigma') = \Theta (\Sigma'')$, а если $\Sigma' \xRightarrow{\tau_k} \Sigma''$, где $k < n$,

то $\Theta (\Sigma') - \Theta (\Sigma'')$ делится на 2^{n-k} .

Утверждение 14.4 В классе \mathcal{U}^K не существует конечной полной системы тождеств.

III. Синтез и сложность управляющих систем

15. Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций

Утверждение 15.1 Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, и π -схема Σ_f , которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|,$$
$$D(\mathcal{F}_f) \leq \lceil \log(n \cdot |N_f|) \rceil + 2.$$

Следствие 1. В силу указанных неравенств, с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π -схемой сложности 2, а также формулой из \mathcal{U}^Φ , имеющей сложность 2, выполняются неравенства

$$L^C(n) \leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1,$$
$$L^K(n) \leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n.$$

Следствие 2.

$$D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Утверждение 15.2 Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π -схема Σ_f и формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2,$$
$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Следствие

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2,$$
$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4.$$

Функции, встречающиеся в приложениях:

1. линейная ФАЛ порядка n , то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\bar{\ell}_n$;
2. мультиплексорная ФАЛ μ_n порядка n ;
3. дешифратор \vec{Q}_n (дизъюнктивный дешифратор \vec{J}_n) порядка n ;
4. универсальная система $\vec{P}_2(n)$ порядка n , состоящая из всех различных ФАЛ множества $P_2(n)$, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

Утверждение 15.3 Для любого натурального n в \mathcal{U}_B^C существует универсальная СФЭ порядка n , сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Следствие

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \leq 2^{2^n} - n.$$

16. Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем

Утверждение 16.1 Если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n.$$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП x_i , $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n+k).$$

Следствие

$$L^C(\ell_n) \geq n,$$

$$L^K(\ell_n) \geq 2n,$$

$$L^C(\mu_n) \geq 2^n + n,$$

$$L^K(\mu_n) \geq 2^n + 2n.$$

Утверждение 16.2 Для системы $F = (f_1, \dots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m).$$

Следствие

$$L^C(\vec{Q}_n) \geq 2^n, \quad L^K(\vec{Q}_n) \geq 2^n,$$

$$L^C(\vec{J}_n) \geq 2^n, \quad L^K(\vec{J}_n) \geq 2^n,$$

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \geq 2^{2^n} - n, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \geq 2^{2^n} - 2$$

Замечание В силу следствия универсальная СФЭ U_n , построенная в утв. 15.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе \mathcal{U}_B^C .

Утверждение 16.3 Если для ФАЛ $f \in P_2(n)$, и для любого $\sigma, \sigma \in B$, ФАЛ $f|_{x_n=\sigma} = f(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$, то

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min\{L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=0}), L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=1})\} + 2.$$

Следствие

$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 1.$$

Утверждение 16.4 Если система ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

Следствие $L^K(\vec{J}_n) \geq 2^{n+1} - 2$

Утверждение 16.5 Для любого натурального n выполняются неравенства:

$$L^C(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^C(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \lfloor 1/n \rfloor;$$

$$L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3;$$

$$L^C(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}), \quad L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^{n+1} - 2;$$

$$L^C(\vec{J}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}).$$

Следствие

$$L^C(\vec{Q}_n) \sim L^C(\vec{J}_n) \sim 2^n.$$

17. Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона

Утверждение 17.1. Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а F , F' и F'' — матрицы, реализуемые КС Σ , Σ' и Σ'' соответственно. Тогда

$$F \geq F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'',$$

если КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Следствие 1. В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС Σ , $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, которая соответствует выходу КС Σ' , реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ' .

Следствие 2. Равенство $F = F' \cdot F''$ выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Замечание. Отождествление входов (выходов) у раздельной по входам (выходам) КС дает раздельную по рассматриваемой группе полюсов КС.

18. Каскадные контактные
схемы и схемы из
функциональных элементов.
Метод каскадов и примеры
его применения, метод
Шеннона

Утверждение 18.1 Если $(1, m)$ -ККС Σ' реализует систему ФАЛ $F' = (f'_1, \dots, f'_m)$, то существует $(1, m)$ -ККС Σ'' , которая реализует систему ФАЛ $\bar{F}' = (\bar{f}'_1, \dots, \bar{f}'_m)$ и для которой $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$.

Утверждение 18.2 Для любого натурального n и $\sigma \in B$ выполняются неравенства:

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n},$$
$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+2} - 6.$$

Утверждение 18.3 Для функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ выполнены соотношения:

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

19. Нижние мощностные оценки функций Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для ФАЛ из специальных классов

Утверждение 19.1 Для некоторых последовательностей $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$, где $i = 1, \dots, 4$, и $n = 1, 2, \dots$, таких, что $\varepsilon_i(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon_i(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства:

$$L^K(f) \geq \left(1 - \varepsilon_1(n)\right) \frac{2^n}{n}, \quad L^C(f) \geq \left(1 + \varepsilon_2(n)\right) \frac{2^n}{n},$$

$$L^\Phi(f) \geq \left(1 - \varepsilon_3(n)\right) \frac{2^n}{\log n}, \quad D(f) \geq n - \log \log n - \varepsilon_4(n).$$

Следствие

$$D(n) \geq \lceil n - \log \log n - o(1) \rceil,$$

$$L^C(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n},$$

$$L^K(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}.$$

Утверждение 19.2

Для класса ФАЛ \mathcal{Q} такого, что

$$n = o\left(\frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}\right)$$
$$(\log n = o(\log \log |\mathcal{Q}(n)|)),$$

выполняются асимптотические неравенства

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}$$

$$(\text{соответственно } L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}).$$

20. Дизъюнктивно-
универсальные множества
функций. Асимптотически
наилучший метод
О. Б. Лупанова для синтеза
схем из функциональных
элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Утверждение 20.1 Для любых натуральных p , m и s , где $p = \lceil \frac{2^m}{s} \rceil$, существует стандартное ДУМ G порядка m и высоты s , которое является ДУМ ранга p и для которого:

1) $\lambda = |G| \leq p2^s$;

2) система из p характеристических ФАЛ ψ_1, \dots, ψ_p ДУМ G обладает тем свойством, что для любой ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, и соответствующих ФАЛ g_1, \dots, g_p из G справедливы представления

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p = \psi_1 g_1 \vee \dots \vee \psi_p g_p.$$

Утверждение 20.2 Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая её СФЭ Σ_f , $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$, такая, что

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right).$$

Следствие. Из этого утверждения с учетом следствия из утверждения 20.1 вытекает, что

$$L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

21. Регулярные разбиения
единичного куба и
моделирование функций
переменными.

Асимптотически наилучший
метод синтеза формул в
базисе $\{\&, \vee, \neg\}$.

Утверждение 21.1 Для любых натуральных m , λ и $q = m + \lambda$ и для любой системы ФАЛ $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$ из $P_2^\lambda(m)$ существует m -регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2q-m})$ куба B^q такое, что любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП x_{m+1}, \dots, x_q , либо с ее отрицанием.

Замечание. Если в условиях утверждения $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda) = \nu^{-1}(j - 1)$, то $g_i \equiv x_{i+m}^{\overline{\alpha_j}}$ на δ_j .

Утверждение 21.2 Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, в \mathcal{U}^Φ существует реализующая ее формула \mathcal{F}_f , для которой

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n} \left(1 + \frac{2 \log \log n + O(1)}{\log n} \right).$$

Следствие. Из этих оценок с учетом нижней оценки следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}.$$

22. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем. Синтез схем для ФАЛ из некоторых специальных классов

Утверждение 22.1 Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

Следствие. Из этой оценки с учетом нижней оценки следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Замечание. Построенную КС Σ_f можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda + 1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа.

23. Синтез схем для некоторых дешифраторов и мультиплексоров. Поведение функции Шеннона для глубины ФАЛ

Утверждение 23.1 Для $n = 1, 2, 3, \dots$
выполняются неравенства

$$L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right).$$

Следствие. Оценки утверждения 23.1 и следствия из следствия из утверждений 16.2, 16.4 дают асимптотические равенства

$$L^K(\vec{Q}_n) \sim 2^n, \quad L^K(\vec{J}_n) \sim 2^{n+1}.$$

Утверждение 23.2 Для $n = 1, 2, \dots$
выполняются неравенства

$$L^\pi(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O(2^n/n),$$

$$L^C(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O(2^n/n),$$

$$D(\mu_n) \leq n + 6,$$

причем существует такая реализующая ФАЛ μ_n и неповторная по информационным БП формула \mathcal{M}_n с поднятыми отрицаниями, глубина которой удовлетворяет последнему из них, альтернирование не больше 3, а сложность не превосходит $7 \cdot 2^n$.

Следствие. Из полученных оценок в силу следствий из утверждения 16.3 вытекает, что

$$L^C(\mu_n) \sim 2^{n+1}, \quad D(\mu_n) = n + O(1).$$

Утверждение 23.3 Для $n = 1, 2, \dots$
выполняются соотношения

$$D(n) = n - \log \log n \pm O(1).$$

Замечание. Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$,
можно построить реализующую ее формулу
указанной глубины, сложность которой
асимптотически не превосходит $2^n / \log n$.

24. Задача контроля схем и
тесты для таблиц.

Построение всех тупиковых
тестов, оценки длины
диагностического теста

Утверждение 24.1 Функция теста $f(y_1, \dots, y_p)$ для отделимой по столбцам матрицы M , $M \in B^{p,s}$, и цели контроля \mathcal{N} может быть задана с помощью КНФ

$$f(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{(i,j) \in \mathcal{N}} \left(\bigvee_{\substack{1 \leq t \leq p \\ M\langle t,i \rangle \neq M\langle t,j \rangle}} y_t \right)$$

Следствие. Каждая элементарная конъюнкция вида $y_{t_1} \cdots y_{t_r}$ сокращенной ДНФ функции $f(y_1, \dots, y_p)$, получающаяся из этой КНФ в результате раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ и обратно.

Утверждение 24.2 Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множества $B^{p,s}$ заключена в пределах от $\lceil \log s \rceil$ до $(s - 1)$.

Утверждение 24.3 Пусть $\varphi(s)$, $t(s)$ и $p(s)$ — целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента s , для которых

$$t(s) = \lceil 2 \log s \rceil + \varphi(s), \quad p(s) \geq t(s), \\ \varphi(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \infty.$$

Тогда у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p(s),s}$ первые $t(s)$ строк образуют диагностический тест.

Следствие Для любой неотрицательной и неограниченно возрастающей функции $\varphi(s)$ у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ длина минимального диагностического теста не больше, чем $2 \log s + \varphi(s)$.

25. Самокорректирующиеся
контактные схемы и методы
их построения.

Асимптотически наилучший
метод синтеза контактных
схем, корректирующих один
обрыв (одно замыкание)

Утверждение 25.1 Для любых $p \geq 0$, $q \geq 0$ и любой КС Σ существует эквивалентная ей КС Σ' , $\Sigma' \in \mathcal{U}_{(p,q)}^K$, для которой

$$L(\Sigma') \leq (p + 1)(q + 1)L(\Sigma)$$

Утверждение 25.2 Для любой КС Σ существуют эквивалентные ей $(1, 0)$ - и $(0, 1)$ -самокорректирующиеся КС Σ' и Σ'' соответственно такие, что

$$L(\Sigma') \leq L(\Sigma) + \zeta(\Sigma), \quad L(\Sigma'') \leq L(\Sigma) + \zeta(\Sigma)$$

Утверждение 25.3 Для $n = 1, 2, \dots$
имеют место следующие асимптотические
равенства:

$$L_{(1,0)}^K(n) \sim L_{(0,1)}^K(n) \sim \frac{2^n}{n}$$

Утверждение 25.4 Для $n = 1, 2, \dots$
имеют место равенства

$$L_{(0,1)}^K(\ell_n) = L_{(0,1)}^K(\bar{\ell}_n) = 4n.$$