

Лекция 6. Подгруппы. Смежные классы, индекс подгруппы в группе. Теорема Лагранжа о порядке подгруппы конечной группы. Нормальные подгруппы. Фактор-группы.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.su

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.su>

# Смежные классы

Пусть  $G = (S; *)$  — группа, а  $H = (T; *)$ ,  $T \subseteq S$ , — ее подгруппа.

Определим на множестве  $S$  бинарное отношение  $R_H$ : если  $a, b \in S$ , то

$$aR_H b \Leftrightarrow \exists h \in H : a * h = b.$$

Заметим, что отношение  $R_H$  можно задавать так: если  $a, b \in S$ , то

$$aR_H b \Leftrightarrow a' * b \in H,$$

где элемент  $a'$  симметричен элементу  $a$  в группе  $G$ .

# Отношение эквивалентности по подгруппе

**Теорема 1.** *Отношение  $R_H$  является отношением эквивалентности на множестве  $S$ .*

**Доказательство.** Свойства отношения эквивалентности.

1) Рефлексивность. Для каждого  $a \in S$  выберем  $e \in H$  — нейтральный элемент. Тогда  $a * e = a$ , поэтому  $aR_H a$ .

2) Симметричность. Пусть для элементов  $a, b \in S$  верно  $aR_H b$ , т.е. найдется такой элемент  $h \in H$ , что  $a * h = b$ . Тогда

$$a * h = b, a * h * h' = b * h', a = b * h'.$$

Т.к.  $H$  — группа,  $h' \in H$ . Отсюда  $bR_H a$ .

3) Транзитивность. Пусть для элементов  $a, b, c \in S$  верно  $aR_H b$  и  $bR_H c$ , т.е. найдутся такие элементы  $h_1 \in H$  и  $h_2 \in H$ , что  $a * h_1 = b$  и  $b * h_2 = c$ . Тогда

$$a * (h_1 * h_2) = (a * h_1) * h_2 = b * h_2 = c.$$

Т.к.  $H$  — группа,  $h_1 * h_2 = h \in H$ . Отсюда  $aR_H c$ .

# Смежные классы

Класс эквивалентности множества  $S$  по отношению эквивалентности  $R_H$  называется **левым смежным классом** группы  $G$  по подгруппе  $H$ .

Обозначение: левый смежный класс, порожденный элементом  $a \in S$ :

$$aH = \{b \in S \mid \exists h \in H : a * h = b\}.$$

В аддитивной символике обозначение:

$$a + H = \{b \in S \mid \exists h \in H : a + h = b\}.$$

Напомним, что классы эквивалентности или не пересекаются, или совпадают. Поэтому отношение  $R_H$  **разбивает** множество  $S$  на левые смежные классы. Такое разбиение называется **левосторонним разложением** группы  $G$  по подгруппе  $H$ .

Аналогично вводится **правостороннее разложение** группы  $G$  по подгруппе  $H$ .

# Смежные классы

Пусть  $H = \{h_1 = e, h_2, \dots, h_m\}$  — конечная подгруппа группы  $G = (S; *)$ .

Тогда для каждого элемента  $a \in S$  левый смежный класс

$$aH = \{a * h_1, a * h_2, \dots, a * h_m\}$$

также содержит конечное число элементов.

**Пример.** Найдём левостороннее разложение симметрической группы перестановок  $S_3$  по подгруппе  $H$  вращений правильного треугольника в плоскости.

Напомним, подгруппа

$$H = \{e = (1)(2)(3), (123), (132)\}.$$

Тогда

$$eH = H = \{e = (1)(2)(3), (123), (132)\};$$

$$(1)(23)H = \{(1)(23), (12)(3), (13)(2)\}.$$

# Смежные классы

**Теорема 2.** В каждом левом (правом) смежном классе группы по конечной подгруппе число элементов совпадает с порядком этой подгруппы.

**Доказательство.** Пусть  $H = \{h_1 = e, h_2, \dots, h_m\}$  — конечная подгруппа группы  $G = (S; *)$ .

Тогда для элемента  $a \in S$  левый смежный класс  $aH$  состоит из элементов вида

$$a * h_1, a * h_2, \dots, a * h_m.$$

Поэтому  $|aH| \leq |H|$ .

Предположим, что  $|aH| < |H|$ . Т.е. найдутся такие элементы  $h_i, h_j \in H$ ,  $h_i \neq h_j$ , что

$$a * h_i = a * h_j.$$

Тогда по правилу сокращения  $h_i = h_j$  — противоречие.

Следовательно,  $|aH| = |H|$ .

# Теорема Лагранжа

**Следствие 2.1 (теорема Лагранжа).** *Порядок каждой подгруппы конечной группы делит порядок группы.*

**Доказательство.** Пусть  $G = (S; *)$  — конечная группа, а  $H$  — ее подгруппа. Рассмотрим левостороннее разложение группы  $G$  по подгруппе  $H$ . Тогда по теореме 2 все левые смежные классы равномогцны, и их мощность равна порядку подгруппы  $H$ . Каждый элемент множества  $S$  лежит ровно в одном левом смежном классе, поэтому

$$|G| = |H| \cdot \{\text{число левых смежных классов}\}.$$

Отсюда  $|H| \mid |G|$ . □

## Порядок элемента конечной группы

**Следствие 2.2.** *Порядок каждого элемента конечной группы делит порядок группы.*

**Доказательство.** Пусть  $G = (S; *)$  — конечная группа, и  $a \in S$  — какой-то ее элемент. Достаточно рассмотреть циклическую ее подгруппу  $H = \langle a \rangle$  с образующим элементом  $a \in S$ . Тогда порядок элемента  $a$  равен порядку группы  $H$ , и по следствию 2.1 делит порядок группы  $G$ .

□



# Индекс подгруппы в группе

Число смежных классов конечной группы  $G$  по подгруппе называется **индексом подгруппы  $H$  в группе  $G$**  и обозначается как  $(G : H)$ .

**Следствие 2.3.** *Порядок конечной группы равен произведению порядка какой-то ее подгруппы на индекс этой подгруппы в группе, т.е.*

$$|G| = |H| \cdot (G : H),$$

где  $G$  — конечная группа, а  $H$  — ее подгруппа.

## Пример: все неизоморфные группы из 5 элементов

**Пример.** Найдем все возможные группы из 5 элементов (с точностью до изоморфизма).

**Решение.** Пусть  $|S| = 5$ , и  $G = (S; *)$  — группа.

Если  $a \in S$ , то (по следствию 2.2) порядок элемента  $a$  делит порядок группы, т.е. делит 5.

Т.е. каждый элемент этой группы имеет порядок или 1, или 5.

Но порядок 1 может иметь только нейтральный элемент  $e$ .

Значит, все другие элементы имеют порядок 5. Т.е. эта группа циклическая, и

$$S = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5 = e\}.$$

Следовательно, с точностью до изоморфизма существует только **одна** группа из 5 элементов, и она является циклической.

Несложно заметить, что это группа вращений правильного пятиугольника в плоскости.

# Нормальные подгруппы

Пусть  $G = (S; *)$  — группа, а  $H = (T; *)$ ,  $T \subseteq S$ , — ее подгруппа.

Подгруппа  $H$  называется **нормальной подгруппой** (или **нормальным делителем**) группы  $G$ , если для каждого элемента  $a \in S$  его левые и правые смежные классы совпадают, т.е. если

$$\forall a \in S \quad aH = Ha.$$

Заметим, что каждая подгруппа коммутативной группы нормальна.

Если подгруппа  $H$  нормальна в группе  $G$ , то левостороннее и правостороннее разложения группы  $G$  по подгруппе  $H$  совпадают.

# Критерий нормальности подгруппы

**Теорема 3.** Подгруппа  $H = (T; *)$  является нормальной подгруппой группы  $G = (S, *)$  тогда и только тогда, когда для каждого элемента  $a \in S$  для любого элемента  $h \in H$  верно, что

$$a' * h * a \in H,$$

где элемент  $a'$  симметричен элементу  $a$  в группе  $G$ .

# Критерий нормальности подгруппы

**Доказательство.**

$\Rightarrow$ . Если для каждого элемента  $a \in S$  верно  $aH = Ha$ , то для любого элемента  $h \in H$  найдется такой элемент  $h_1 \in H$ , что

$$a * h_1 = h * a.$$

Отсюда

$$a' * (a * h_1) = a' * (h * a), \quad h_1 = a' * h * a.$$

Т.е.  $a' * h * a \in H$ .

# Критерий нормальности подгруппы

**Доказательство.**

$\Leftarrow$ . Если для каждого элемента  $a \in S$  для любого элемента  $h \in H$  верно  $a' * h * a \in H$ , то

$$a' * h * a = h_1 \in H.$$

Отсюда

$$a * (a' * h * a) = a * h_1, \quad h * a = a * h_1.$$

Т.е.  $Ha \subseteq aH$ .

Включение  $aH \subseteq Ha$  доказывается аналогично, рассматривая произведение  $(a')' * h * a'$ ,  $a' \in S$ .

Поэтому,  $aH = Ha$ .



# Нормальные подгруппы в $S_n$

**Пример.** Докажем, что группа  $H$  вращений правильного треугольника в плоскости является нормальной подгруппой группы  $S_3$ .

Напомним, что группа

$$S_3 = \{e = (1)(2)(3), (1)(23), (12)(3), (13)(2), (123), (132)\},$$

и подгруппа  $H$

$$H = \{(1)(2)(3), (123), (132)\}.$$

Тогда

$$eH = H = \{(1)(2)(3), (123), (132)\} = He,$$

и

$$(1)(23)H = \{(1)(23), (12)(3), (13)(2)\} = H(1)(23).$$

Т.е. подгруппа  $H$  — нормальная подгруппа группы  $S_3$ .

# Фактор-группа

Пусть  $G = (S; *)$  — группа, и  $N = (T; *)$  — ее **нормальная** подгруппа.

Рассмотрим разложение группы  $G$  по нормальной подгруппе  $N$ .

Введем операцию умножения смежных классов: если элементы  $a, b \in S$ , то

$$(aN)(bN) = (ab)N.$$



# Фактор-группа

**Теорема 4.** Если  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G = (S; *)$ , то введенная выше операция умножения смежных классов корректна.

**Доказательство.** Если элементы  $a, b \in S$ , то

$$(aN)(bN) = \{a*h_1 \mid h_1 \in N\}\{b*h_2 \mid h_2 \in N\} = \{a*h_1*b*h_2 \mid h_1, h_2 \in N\}$$

Т.к.  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G$ , то  $b * N = N * b$ .

Отсюда, найдется такой элемент  $h_3 \in N$ , что

$$h_1 * b = b * h_3.$$

Тогда

$$(aN)(bN) = \{a*b*h_3*h_2 \mid h_1, h_2 \in N\} = \{a*b*h \mid h \in N\} = (ab)N.$$



# Фактор-группа

**Теорема 5.** Если  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G = (S; *)$ , то множество смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $N$  с операцией их умножения образует группу.

**Доказательство.** Свойства группы.

- 1) Ассоциативность операции умножения: следует из ассоциативности операции  $*$  в группе  $G$ .
- 2) Существование нейтрального элемента:  $eN = N$ , где  $e \in S$  — нейтральный элемент группы  $G$ .
- 3) Для каждого элемента  $aN$ , где  $a \in S$ , существование симметричного элемента:  $a'N$ , где элемент  $a' \in S$  симметричен элементу  $a$  в группе  $G$ .



Группа смежных классов группы  $G$  по нормальной ее подгруппе  $N$  с операцией их умножения называется **фактор-группой** группы  $G$  по подгруппе  $N$  и обозначается  $G/N$ .

# Фактор-группа

**Теорема 5.** *Порядок фактор-группы  $G/N$  конечной группы  $G$  по ее нормальной подгруппе  $N$  равен индексу подгруппы  $N$  в группе  $G$ , т.е.*

$$|G/N| = (G : N) = \frac{|G|}{|N|}.$$

# Фактор-группа

**Пример.** Найдем фактор-группу  $S_3/H$  группы  $S_3$  по нормальной подгруппе  $H$  вращений правильного треугольника в плоскости.

Тогда фактор-группа

$$S_3/H = (\{eH, (1)(23)H\}, \cdot),$$

где

$$eH = H = \{(1)(2)(3), (123), (132)\},$$

и

$$(1)(23)H = \{(1)(23), (12)(3), (13)(2)\}.$$

В фактор-группе  $S_3/H$  верно

$$eH \cdot X = X \cdot eH = X, \text{ при } X = eH, (1)(23)H;$$

$$(1)(23)H \cdot (1)(23)H = eH.$$

Т.е. фактор-группа  $S_3/H$  изоморфна группе  $S_2$ .

## Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все неизоморфные группы из 4-х элементов.
2. Найти все неизоморфные группы из  $p$  элементов, где  $p$  — простое число.
3. Найти группу перестановок вершин правильного шестиугольника при его вращениях в плоскости. Найти все подгруппы этой группы. Какие из них являются нормальными подгруппами?
4. Пусть  $H$  — подгруппа группы  $G$ , и порядок  $H$  равен  $\frac{|G|}{2}$ . Доказать, что  $H$  — нормальная подгруппа группы  $G$ .

# Литература к лекции

1. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988. Гл. 1, с. 12-23.

Конец лекции