Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

Элементы теории синтеза и надёжности дискретных управляющих систем

Москва — 2020

Оглавление

1 Асимптотически наилучшие методы синтеза схем в некоторых моделях дискретных управляющих систем 3

§1 Формулы и СФЭ в произвольном базисе, функционалы их сложности. Верхние оценки числа формул и СФЭ 3

§2 Некоторые модификации контактных схем, итеративные контактные схемы. Верхние оценки числа схем контактного типа 6

§3 Нижние мощностные оценки функций Шеннона 9

§4 Обобщенное разложение мультиплексорных ФАЛ, его особенности. Универсальные множества ФАЛ, их построение и реализация 12

§5 Асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ и ИКС в произвольном базисе 15

§6 Асимптотически наилучший метод синтеза формул и контактных схем в произвольном базисе 18

§7 Поведение функции Шеннона для задержки ФАЛ в произвольном базисе. Синтез СФЭ асимптотически оптимальных как по сложности, так и по задержке 23

2 Некоторые вопросы надёжности схем из функциональных элементов 26

§1 Вероятностное описание источников помех и повреждений СФЭ. Невозможность построения сколь угодно надежных схем для источников неймановского типа 26

§2 Эффект нарастания ненадежности. Построение сколь угодно надёжных СФЭ в базисе из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования 29

§3 Самокорректирующиеся СФЭ в базисах из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования, асимптотически наилучшие методы их синтеза 32

§4 Сферические функции. Сложность линейной и других функций в классе контактных схем и самокорректирующихся контактных схем 35

Литература 40

Глава 1

Асимптотически наилучшие методы синтеза схем в некоторых моделях дискретных управляющих систем

§1 Формулы и СФЭ в произвольном базисе, функционалы их сложности. Верхние оценки числа формул и СФЭ

Продолжим начатое в [3, Гл. 2, 4] изучение формул и схем из функциональных элементов (СФЭ) над произвольным конечным полным базисом Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где функциональный элемент (ФЭ) $\mathcal{E}_i$ реализует ФАЛ $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$, которая в случае $k_i \geqslant 2$ существенно зависит от всех своих переменных.

Будем по-прежнему (ср. [3, Гл. 2, §3]) представлять СФЭ Σ в виде $\Sigma = \Sigma(x;\, z)$, если $x = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $z = (z_{j_1}, \ldots, z_{j_n})$ — наборы, составленные из всех её различных входных и выходных булевых переменных (БП), перечисленных в порядке возрастания их номеров в алфавитах $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots\}$, соответственно. Сложность, то есть число ФЭ, глубину, то есть максимальное число последовательно соединённых ФЭ, и ранг, то есть число дуг, исходящих из входов, в схеме Σ, следуя [3], будем обозначать через $L(\Sigma)$, $D(\Sigma)$ и $R(\Sigma)$ соответственно.

Введём теперь «взвешенные» функционалы сложности и глубины СФЭ. Будем считать, что каждому функциональному элементу $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, сопоставлены положительные действительные числа $\mathcal{L}_i$ и T_i, называемые его «весом» и «задержкой», которые характеризуют сложность («размер») и время срабатывания $\mathcal{E}_i$ соответственно. Предполагается, что «вес» и «задержка» любого ФЭ стандартного базиса Б$_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ равны 1. Если (v_0, v_t)-цепь C длины t в СФЭ Σ проходит через вершины $v_1, \ldots, v_{t-1}$, и вершине v_j, $j = 1, \ldots, t$, при этом соответствует ФЭ $\mathcal{E}_{i_j}$ базиса Б, то число $T(C) = T_{i_1} + \cdots + T_{i_t}$ будем называть *задержкой* этой цепи.

По аналогии с глубиной определим *задержку* вершины v СФЭ Σ как максимальную задержку тех цепей Σ, которые начинаются в одной из ее входных вершин и заканчиваются в вершине v. Для каждой СФЭ Σ над базисом Б помимо сложности $L(\Sigma)$, глубины $D(\Sigma)$ и ранга $R(\Sigma)$ определим следующие параметры (функционалы сложности):

1) $\mathcal{L}(\Sigma)$ — *размер* Σ, то есть сумма «весов» всех её ФЭ;

2) $T(\Sigma)$ — *задержка* Σ, то есть максимальная задержка её вершин.

Заметим, что функционал L (D) является частным случаем функционала $\mathcal{L}$ (соответственно T), когда веса (соответственно задержки) всех ФЭ базиса Б равны 1. Введем также

«частичный» размер $\mathcal{L}_{\text{Б}'}(\Sigma)$ (задержку $T_{\text{Б}'}(\Sigma)$), который равен сумме весов ФЭ Σ типа $\mathcal{E}_i$, где $\mathcal{E}_i \in \text{Б}'$, в СФЭ Σ (соответственно максимальной сумме задержек ФЭ указанного вида, лежащих на одной цепи Σ). Аналогичным образом вводится «частичная» сложность $L_{\text{Б}'}(\Sigma)$ и «частичная» глубина $D_{\text{Б}'}(\Sigma)$ для СФЭ Σ.

Напомним (см. [3]), что СФЭ называется *приведённой*, если выход любого её ФЭ, не являющийся выходом схемы, поступает на вход другого ФЭ этой схемы. Приведённая СФЭ (системы формул) считается *строго приведённой*, если в ней нет эквивалентных вершин, то есть вершин, в которых реализуются равные ФАЛ (соответственно нет эквивалентных вершин, лежащих на одно цепи). Заметим, что для любой СФЭ (системы формул) Σ существует эквивалентная ей строго приведённая СФЭ (соответственно система формул) Σ', для которой

$$\mathcal{L}_{\text{Б}'}(\Sigma') \leqslant \mathcal{L}_{\text{Б}'}(\Sigma) \quad \text{и} \quad T_{\text{Б}'}(\Sigma') \leqslant T_{\text{Б}'}(\Sigma)$$

при любом $\text{Б}' \subseteq \text{Б}$. Легко видеть также, что в строго приведённой формуле или СФЭ нет трёх или более последовательно соединённых одновходовых ФЭ.

Для базиса $\text{Б} = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$ положим $\widehat{\text{Б}} = \{\, \mathcal{E}_i \mid k_i \geqslant 2 \,\}$ и заметим, что множество $\widehat{\text{Б}}$ не пусто в силу полноты базиса Б. Для ФЭ $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_i \in \widehat{\text{Б}}$, определим его *приведённый вес* ρ_i и *приведённую задержку* τ_i следующим образом:

$$\rho_i = \frac{\mathcal{L}_i}{k_i - 1}, \qquad \tau_i = \frac{T_i}{\log k_i}.$$

Введём, далее, величины

$$\rho_{\text{Б}} = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{\text{Б}}} \rho_i \quad \text{и} \quad \tau_{\text{Б}} = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{\text{Б}}} \tau_i,$$

которые назовём *приведённым весом* и *приведённой задержкой базиса* Б соответственно. Для стандартного базиса $\text{Б}_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, очевидно, $\widehat{\text{Б}}_0 = \{\&, \vee\}$, $\rho_{\text{Б}_0} = \tau_{\text{Б}_0} = 1$. Для функционала сложности ψ типа L, $\mathcal{L}$, D, T через $\widehat{\psi}(\Sigma)$ будем обозначать величину $\psi_{\widehat{\text{Б}}}(\Sigma)$.

Следуя [3] обозначим через $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{УС}}$ и $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ множество СФЭ над базисом Б, множество усилительных СФЭ над Б и множество формул над Б соответственно. При этом для каждого A, $A \in \{\text{С}, \Phi\}$, определим размер $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(F)$ ФАЛ или системы ФАЛ F в классе $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}$ и её задержку $T_{\text{Б}}(F)$ обычным образом, а через $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(n)$ и $T_{\text{Б}}(n)$ обозначим соответствующие функции Шеннона.

Лемма 1.1. *Для любой формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, выполняются неравенства*

$$R(\mathcal{F}) \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1, \qquad R(\mathcal{F}) \leqslant 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{\text{Б}}}}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть для каждого i, $i = 1, \ldots, b$, формула $\mathcal{F}$ содержит s_i ФЭ $\mathcal{E}_i$. При этом для числа ребер квазидерева $\mathcal{F}$ будут выполняться равенства

$$|E(\mathcal{F})| = \sum_{i=1}^{b} s_i \cdot k_i = R(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^{b} s_i - 1.$$

Следовательно,

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{b} s_i(k_i - 1) + 1 = \sum_{k_i \geqslant 2} \frac{k_i - 1}{\mathcal{L}_i} \cdot \mathcal{L}_i s_i + 1 \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \sum_{k_i \geqslant 2} \mathcal{L}_i s_i + 1 = \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1$$

и первое неравенство (1.1) доказано.

Второе неравенство (1.1) доказывается индукцией по $D(\mathcal{F})$. Действительно, при $D(\mathcal{F}) = 0$, когда $\mathcal{F} = x_j$, оно, очевидно, выполняется. Пусть теперь второе неравенство (1.1) верно для любой формулы глубины меньше, чем d, и пусть $\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i})$, где $D(\mathcal{F}) = d$ и $D(\mathcal{F}_j) < d$, $\widehat{T}(\mathcal{F}_j) = t_j$ при всех $j = 1, \ldots, k_i$. Тогда

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{k_i} R(\mathcal{F}_j) \leqslant k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{\text{Б}}}},$$

где $t = \max_{1 \leqslant j \leqslant k_i} t_j$. Следовательно, при $k_i = 1$ формула $\mathcal{F}$ удовлетворяет второму неравенству (1.1), так как в этом случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t$. При $k_i \geqslant 2$ в соответствии с определением $\tau_{\text{Б}}$ выполняется неравенство

$$k_i \leqslant 2^{\frac{T_i}{\tau_{\text{Б}}}},$$

используя которое и учитывая, что в данном случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t + T_i$, получим

$$R(\mathcal{F}) \leqslant k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{\text{Б}}}} \leqslant 2^{\frac{t + T_i}{\tau_{\text{Б}}}} = 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{\text{Б}}}}.$$

Лемма доказана. □

Замечание. Аналогично первому неравенству (1.1) доказывается, что число рёбер дерева, соответствующего формуле $\mathcal{F}$, в которой нет трёх и более последовательно соединённых одновходовых ФЭ, удовлетворяет неравенству

$$|E(\mathcal{F})| \leqslant 6\big(R(\mathcal{F}) - 1\big). \tag{1.2}$$

Действительно, если $\mathcal{F}$ содержит s_i ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, то

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{b} s_i(k_i - 1) + 1 \geqslant \widehat{L}(\mathcal{F}) + 1,$$

$$|E(\mathcal{F})| \leqslant 3\big(R(\mathcal{F}) + \widehat{L}(\mathcal{F}) - 1\big) \leqslant 3\big(2R(\mathcal{F}) - 2\big) = 6\big(R(\mathcal{F}) - 1\big).$$

Неравенство (1.2) выполняется, в частности, для строго приведённой формулы $\mathcal{F}$.

Для приведённой одновыходной СФЭ Σ на базисом Б её *остовом* будем называть такую формулу $\mathcal{F}(x_1)$ над Б, дерево которой получается в результате применения к каждой вершине Σ операций отсоединения всех исходящих дуг, кроме одной, и объявления начальных вершин этих дуг листьями указанного дерева.

Пусть для $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}\langle \mathcal{L}, n\rangle$ ($\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\langle \mathcal{L}, n\rangle$, $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\{T, n\}$) — множество всех строго приведённых[1] схем из функциональных элементов вида $\Sigma(x_1, \ldots, x_n;\ z_1)$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$ (соответственно формул $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$), для которых $\mathcal{L}(\Sigma) \leqslant \mathcal{L}$ (соответственно $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \leqslant \mathcal{L}$, $T(\mathcal{F}) \leqslant T$).

[1] Напомним [3], что СФЭ является *приведённой*, если в ней нет «висячих» вершин и *строго приведённой*, если в ней, кроме того, нет вершин, в которых реализуются равные ФАЛ.

Лемма 1.2. *Для любых $\mathcal{L} \geqslant 0$, $T \geqslant 0$ и любого натурального n справедливы неравенства*[2]*:*

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{C}}\langle\mathcal{L},n\rangle\right\| \leqslant \left(c_1(\mathcal{L}+n)\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{1.3}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\langle\mathcal{L},n\rangle\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{1.4}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\{T,n\}\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{2^{\frac{T}{\tau_{\text{Б}}}}}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть $\Sigma \in \mathcal{U}^{\text{C}}\langle\mathcal{L},n\rangle$, а $\check{\mathcal{F}}$ — остов Σ. В силу леммы 1.1 и замечания к ней число рёбер в дереве формулы $\check{\mathcal{F}}$ не больше, чем $\widehat{c}_1\mathcal{L}$, где $\widehat{c}_1 = \frac{6}{\rho_{\text{Б}}}$, а число таких попарно не изоморфных формул не превосходит $c_2^{\mathcal{L}/\rho_{\text{Б}}}$, где $c_2 \leqslant 4^6$. Любая формула $\mathcal{F}$ (СФЭ Σ) из $\mathcal{U}^{\text{C}}\langle\mathcal{L},n\rangle$ может быть получена в результате присоединения каждого из $R(\check{\mathcal{F}}) \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}(\check{\mathcal{F}})+1$ (в силу леммы 1.1) листьев дерева формулы $\check{\mathcal{F}}$, являющейся её остовом, к входам $x_1,\ldots,x_n$ (соответственно к входам $x_1,\ldots,x_n$ и внутренним вершинам $\check{\mathcal{F}}$), которое можно осуществить не более, чем $n^{R(\check{\mathcal{F}})}$ (соответственно $(\widehat{c}_1\cdot\mathcal{L}+n)^{R(\check{\mathcal{F}})}$) способами. Перемножая полученные оценки и учитывая (1.1) приходим к (1.3) с константой $c_1 = c_2\max\{\widehat{c}_1,1\}$ и (1.4).

В случае $\Sigma = \mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\{T,n\}$, рассуждая аналогично, приходим к (1.5) с учётом того, что число рёбер в формуле $\check{\mathcal{F}}$ не больше, чем $6\cdot 2^{T/\tau_{\text{Б}}}$, число таких формул не превосходит $(c_2)^{2^{T/\tau_{\text{Б}}}}$, а их ранг ограничен сверху в силу (1.1) числом $2^{T/\tau_{\text{Б}}}$.

Лемма доказана. □

§2 Некоторые модификации контактных схем, итеративные контактные схемы. Верхние оценки числа схем контактного типа

Рассмотрим теперь классы контактных схем (КС) и итеративно-контактных схем (ИКС) над заданным базисом функционально-проводящих элементов (ФПЭ) или, для краткости, контактов, частными случаями которых являются известные классы схем «проводящего» типа — классы «обычных» КС и ИКС (см., например, [3]).

Рассматриваемые схемы строятся из ФПЭ базиса Б $= \{\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_b\}$, каждый элемент $\mathcal{K}_i$, $i=1,\ldots,b$, которого представляет собой тройку $\langle\varphi_i,\mathcal{L}_i,\tau_i\rangle$, где φ_i — ФАЛ, существенно зависящая от БП $x_1,\ldots,x_{k_i}$, $\mathcal{L}_i$ — положительное действительное число, а τ_i — булевская константа. Предполагается, что число $\mathcal{L}_i$ характеризует сложность («вес») ФПЭ $\mathcal{K}_i$, который состоит из ориентированного в случае $\tau_i = 0$ и неориентированного в случае $\tau_i = 1$ контакта K_i, проводящего на наборе α значений БП $x_1,\ldots,x_{k_i}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_i(\alpha) = 1$, причём указанная проводимость в случае $\tau_i = 0$ имеет место только в направлении ориентации $\mathcal{K}_i$.

Таким образом, с формальной точки зрения ФПЭ $\mathcal{K}_i$ представляет собой контакт (ребро) K_i с пометкой φ_i. При этом из содержательных соображений можно считать, что ФПЭ $\mathcal{K}_i$ состоит из контакта K_i и функционального элемента $\mathcal{E}_i$, реализующего ФАЛ φ_i, выход которого «управляет» проводимостью K_i.

[2]Буквой c с различными индексами будем обозначать константы, зависящие только от базиса Б

Следуя [3], определим (одновходовую) КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ над базисом Б как частично ориентированный граф с единственным (проводящим) входом, помеченным символом 1, и m (проводящими) выходами, помеченными выходными БП $z_1, \ldots, z_m$, каждое ориентированное (соответственно, неориентированное) ребро которого помечено одной из базисных ФАЛ φ_i, где $\tau_i = 0$ (соответственно, $\tau_i = 1$), зависящей от k_i переменных из множества входных (управляющих) БП $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Для любой упорядоченной пары (u, v) вершин данной КС стандартным образом вводится ФАЛ проводимости от u к v, зависящая от БП $X(n)$. Будем, как обычно, считать, что в каждой вершине рассматриваемой КС Σ реализуется ФАЛ проводимости от входа 1 к этой вершине, и что сама КС Σ реализует систему ФАЛ $F_\Sigma = (f_1, \ldots, f_m)$, где f_j — ФАЛ, реализуемая в вершине Σ с пометкой z_j, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$ — класс КС над базисом Б, входные и выходные БП которых берутся из счётных упорядоченных непересекающихся алфавитов $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots\}$ соответственно. Предполагается, что базис Б является полным, то есть любая ФАЛ от БП из $\mathcal{X}$ может быть реализована схемой из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$. Заметим, что любой базис, содержащий «обычные» неориентированные замыкающий и размыкающий контакты, т. е. контакты с базисной ФАЛ x_i и $\bar{x}_i$ соответственно, является полным. Базис Б_0, состоящий из замыкающего и размыкающего контактов веса 1, будем считать *стандартным*.

Для удобства будем считать, что при построении схем над базисом Б разрешается подставлять константы вместо БП его контактов. В этом случае необходимым и достаточным условием полноты Б является наличие среди его базисных как ФАЛ, которая не является монотонной, так и ФАЛ, которая не является антимонотонной.

Под сложностью $\mathcal{L}(\Sigma)$ КС Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$, понимается, как обычно, сумма весов всех её ФПЭ, а под сложностью $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{К}}(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ от БП из $\mathcal{X}$ — минимальная из сложностей схем класса $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$, её реализующих. Для указанного функционала сложности обычным образом вводится соответствующая функция Шеннона

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{К}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{К}}(f), \tag{2.1}$$

где, как обычно, $P_2(n)$ — множество всех ФАЛ от БП $X(n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определим далее класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ — класс *итеративно-контактных схем над базисом* Б, который обобщает класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$ аналогично тому как класс «обычных» ИКС [3] обобщает класс обычных КС $\mathcal{U}_{\text{Б}_0}^{\text{К}}$.

Для этого рассмотрим счётный упорядоченный алфавит итеративных БП $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_p, \ldots\}$, где $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \varnothing$, и индукцией по t, $t = 0, 1, \ldots$, введём класс $\mathcal{U}_{\text{Б},t}^{\text{ИКС}}$ — класс ИКС *итеративного ранга* t над базисом Б. Базис указанной индукции составляет класс $\mathcal{U}_{\text{Б},0}^{\text{ИКС}}$ — класс ИКС итеративного ранга 0, который совпадает с классом $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$. Заметим, что класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ является полным тогда и только тогда, когда полон класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$.

Индуктивный переход, позволяющий от ИКС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ из класса $\mathcal{U}_{\text{Б},t}^{\text{ИКС}}$, реализующей систему ФАЛ $(f_1, \ldots, f_m)$ от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$, переходить к реализующей систему ФАЛ $(f'_1, \ldots, f'_{j-1}, f'_{j+1}, \ldots, f'_m)$ от БП $x' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ ИКС

$\Sigma' = \Sigma'(x', z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_m)$ из класса $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б},t+1}$, связан с применением операции присоединения выхода z_j ИКС Σ к её входу x_i. Эта операция применима, если ФАЛ f_j не зависит существенно от x_i и состоит в замене пометки z_j выходной вершины v ИКС Σ, а также всех пометок БП x_i на контактах Σ пометками БП y_{t+1}. При этом предполагается, что ФАЛ $f'_s(x')$, где $s \neq j$, получается из ФАЛ $f_s(x)$ подстановкой ФАЛ $f_j(x')$ вместо БП x_j.

Будем считать, что для описанных выше схем ИКС Σ является *базовой ИКС ранга* t для ИКС Σ' и что переходя от ИКС Σ к её базовой ИКС ранга $(t-1)$ и т. д. мы придём к базовой для ИКС Σ' КС $\widehat{\Sigma}$. Заметим, что сложности всех построенных ИКС одинаковы и равны $L(\widehat{\Sigma})$. Определим, наконец, класс $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}$ как объединение классов $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б},i}$ по всем i, $i = 0, 1, \ldots$.

Для полного класса $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}$ и произвольной системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ обычным образом определяется сложность $\mathcal{L}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}(F)$ — сложность реализации системы F в классе $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}$, а затем аналогично (2.1) вводится соответствующая функция Шеннона $\mathcal{L}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}(n)$.

Пусть, как обычно, $\mathcal{U}^{W}_{\text{Б}}(\mathcal{L}, n)$, где $W \in \{\text{К}, \text{ИКС}\}$, — множество всех схем из $\mathcal{U}^{W}_{\text{Б}}$, реализующих одну ФАЛ из $P_2(n)$. Следуя [3] для (конечного) множества схем $\mathcal{G}$ через $|\mathcal{G}|$ и $||\mathcal{G}||$ будем обозначать число попарно не изоморфных и число попарно не эквивалентных схем в $\mathcal{G}$ соответственно.

Для базиса $\text{Б} = \{\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_b\}$ положим

$$\pi_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \mathcal{L}_i, \qquad \hat{\rho}_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \frac{\mathcal{L}_i}{k_i + 1}, \qquad k_{\text{Б}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant b} k_i.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Для любого $\mathcal{L} \geqslant 0$ и любого натурального n справедливы неравенства*

$$||\mathcal{U}^{\text{К}}_{\text{Б}}\langle \mathcal{L}, n\rangle|| \leqslant \left(c_3 \mathcal{L} n^{k_{\text{Б}}}\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}}} \tag{2.2}$$

$$||\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}\langle \mathcal{L}, n\rangle|| \leqslant \left(c_4(\mathcal{L} + n)\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\hat{\rho}_{\text{Б}}}} \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1)$ — схема от (управляющих) БП $x_1, \ldots, x_n$ с (проводящим) входом, имеющим пометку "1", и выходом z_1, которая принадлежит множеству $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}\langle \mathcal{L}, n\rangle$, включающему в себя множество $\mathcal{U}^{\text{К}}_{\text{Б}}\langle \mathcal{L}, n\rangle$ в качестве подмножества. При этом для схемы Σ, содержащей для каждого i, $i = 1, \ldots, b$, $q_i = q_i(\Sigma)$ контактов $\mathcal{K}_i$, выполняются соотношения:

$$L = L(\Sigma) = \sum_{i=1}^{b} q_i;\ \mathcal{L}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{b} q_i L_i \leqslant \mathcal{L};\ L \leqslant \left\lfloor \frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}} \right\rfloor;\ R = R(\Sigma) = \sum_{i=1}^{b} k_i q_i; \tag{2.4}$$

$$L + R = \sum_{i=1}^{b} (k_i + 1) q_i = \sum_{i=1}^{b} q_i L_i \frac{k_i + 1}{L_i} \leqslant \frac{1}{\hat{\rho}_{\text{Б}}} \mathcal{L}(\Sigma), \tag{2.5}$$

где параметр $R = R(\Sigma)$ задает суммарное число управляющих входов у элементов (контактов) Σ.

Оценим сверху число попарно неизоморфных неориентированных связных графов схемы Σ указанного вида. Для этого выберем сначала ее остовное упорядоченное поддерево $\mathcal{D}$ с

корнем в выходной вершине Σ так, чтобы оно содержало все инцидентные корню ребра схемы Σ, а ее вход был бы самым "левым" листом $\mathcal{D}$.

Достроим, далее, дерево $\mathcal{D}$ до остовного наддерева $\hat{\mathcal{D}}$ графа схемы Σ путем присоединения одной концевой вершины каждого из не вошедших в $\mathcal{D}$ ребер Σ к одной из отличных от входа и выхода инцидентных ему в Σ вершин $\mathcal{D}$ и объявления другой вершины этого ребра листом дерева $\hat{\mathcal{D}}$. Заметим, что (см. [4]) число различных полученных таким образом деревьев $\hat{\mathcal{D}}$ не больше, чем 4^L, а число отличных от корня вершин $\mathcal{D}$, среди которых содержатся все его листья, не больше, чем L.

Заметим также, что по дереву $\hat{\mathcal{D}}$ вход и выход Σ определяются однозначно, а для получения из него графа схемы Σ достаточно присоединить каждый его лист к одной из отличных от корня вершин $\hat{\mathcal{D}}$, причем число вариантов указанного присоединения не больше, чем L^L.

После этого для задания самой схемы Σ достаточно каждому ее ребру приписать тип связанного с ним контакта $\mathcal{K}_i$, $i = 1, \ldots, b$, (b^L вариантов), а затем выбрать k_i вершин или БП, соответствующих аргументам базисной ФАЛ φ_i, управляющей его проводимостью, (всего R выбираемых позиций), и, в случае ориентированности контакта $\mathcal{K}_i$ — ориентацию связанного с ним ребра.

Из всего сказанного выше с учетом (2.4) и (2.5) вытекает, что

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}(L, n)|| \leqslant (8bL)^L \cdot n^R \leqslant (8bn^{k_{\text{Б}}}L)^L,$$

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(L, n)|| \leqslant (8nL)^L (n + L)^R \leqslant (8n(L + n))^{(k_{\text{Б}}+1)L}$$

и, следовательно,

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}\langle \mathcal{L}, n\rangle|| \leqslant \left(c_3 \mathcal{L} n^{k_{\text{Б}}}\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}}},\ ||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}\langle \mathcal{L}, n\rangle|| \leqslant \left(c_4(\mathcal{L} + n)\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}}$$

Теорема доказана. □

§3 Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Установим ряд нижних оценок для введённых в §1, §2 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном [**?**, **?**], который основан на том, что число ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента n.

Пусть $\mathcal{U}$ — один из рассмотренных в §1, §2 классов схем, Ψ — введённый там функционал сложности, а $\Psi(n)$ — функция Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно Ψ. Обозначим через $\mathcal{U}(\Psi, n)$ множество тех схем Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют одну ФАЛ из $P_2(n)$ и для которых $\Psi(\Sigma) \leqslant \Psi$. Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений:

$$||\mathcal{U}\big(\Psi(n), n\big)|| = 2^{2^n}. \tag{3.1}$$

Заметим также, что если для некоторого натурального n и действительных $\widehat{\Psi}$, δ, где $0 < \delta < 1$, выполняется неравенство

$$||\mathfrak{U}\big(\widehat{\Psi}, n\big)|| \leqslant \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то} \tag{3.2}$$

то $\Psi(f) \geqslant \widehat{\Psi}$ для не менее чем $(1-\delta) \cdot 2^{2^n}$ ФАЛ f из $P_2(n)$.

Верхние оценки величины $||\mathfrak{U}(\Psi, n)||$, установленные в §1, §2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (3.1)–(3.2) служат основой для получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ. Напомним, что (см. [3, Гл. 2, теорема 3.1 и лемма 5.3]) для каждого натурального n справедливы неравенства:

$$|\mathfrak{U}^{\mathrm{C}}(L, n)| \leqslant \big(32(L+n)\big)^{L+1}, \tag{3.3}$$

$$|\mathfrak{U}^{\Phi}(L, n)| \leqslant \big(32n\big)^{L+1}, \tag{3.4}$$

$$|\mathfrak{U}^{\mathrm{K}}(L, n)| \leqslant \big(8nL\big)^{L}, \tag{3.5}$$

$$|\mathfrak{U}^{\Phi}[T, n]| \leqslant \big(64n\big)^{2^T}. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Для $\gamma \in \{0, 1\}$ и положительных действительных чисел a, α, y, q таких, что*

$$(ay^{\gamma})^{\alpha y} \geqslant q, \tag{3.7}$$

в случае $\gamma = 1$ и $\frac{a}{\alpha} \log q > 1$ выполняется неравенство

$$y \geqslant \frac{\log q}{\alpha \log\left(\frac{a}{\alpha} \log q\right)} \left(1 + \frac{\log\log\left(\frac{a}{\alpha} \log q\right)}{\log\left(\frac{ae}{\alpha} \log q\right)}\right), \tag{3.8}$$

где e — основание натуральных логарифмов, а в случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ — неравенство

$$y \geqslant \frac{\log q}{\alpha \log a}. \tag{3.9}$$

Доказательство. В случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ неравенство (3.9) получается в результате логарифмирования (3.7) и деления обеих частей полученного неравенства на $\alpha \log a$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = \alpha = a = 1$ и $\log q > 1$. В этом случае неравенство (3.8) следует из того, что левая часть (3.7) монотонно возрастает по y, и для

$$y' = (1+\varepsilon)\frac{\log q}{\log\log q}, \qquad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{\log\log\log q}{\log\left(e \log q\right)},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} y' \log y' = (1+\varepsilon)\frac{\log q}{\log\log q}\big(\log\log q - \log\log\log q + \log e \ln(1+\varepsilon)\big) \leqslant \\ \leqslant \log q(1+\varepsilon)\left(1 - \frac{\log\log\log q}{\log\log q} + \frac{\varepsilon \log e}{\log\log q}\right) = \\ = \log q(1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = \log q\big(1-\varepsilon^2\big) \leqslant \log q. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае $\gamma = 1$, $\alpha > 0$, $a > 0$ неравенство (3.7) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} \geqslant q^{\frac{a}{\alpha}},$$

и поэтому неравенство (3.8) получается из неравенства $y \geqslant y'$ в результате замены y на ay и $\log q$ на $\frac{a}{\alpha}\log q$, если выполнено условие $\frac{a}{\alpha}\log q > 1$.

Лемма доказана. □

Теорема 3.1. *Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon(n) \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, выполняются неравенства*

$$L^{\mathrm{C}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n}\big(1 + \varepsilon(n)\big), \tag{3.10}$$

$$L^{\Phi}(n) \geqslant \frac{2^n}{\log n}\big(1 - \varepsilon(n)\big), \tag{3.11}$$

$$L^{\mathrm{K}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n}\big(1 - \varepsilon(n)\big), \tag{3.12}$$

$$D(n) \geqslant n - \log\log n - \varepsilon(n). \tag{3.13}$$

Доказательство. Неравенства (3.10)–(3.12) выводятся из соответствующего рассматриваемому классу схем $\mathcal{U}$ с функционалом сложности L неравенства (3.3)–(3.5) на основе мощностного равенства (3.1) с использованием леммы 3.1, где $q = 2^{2^n}$, $\alpha = 1$ и

$$\begin{array}{llll} \gamma = 1, & a = 32, & y = L^{\mathrm{C}}(n) + n, & \text{если} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\mathrm{C}}; \\ \gamma = 0, & a = 32n, & y = L^{\Phi}(n) + 1, & \text{если} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\Phi}; \\ \gamma = 1, & a = 8n, & y = L^{\mathrm{K}}(n), & \text{если} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\mathrm{K}}. \end{array}$$

Действительно, подставляя указанные значения в (3.8) и (3.9), получим

$$L^{\mathrm{C}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n+5}\left(1 + \frac{\log(n+5)}{n+7}\right) - n \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{\log n - 5 - o(1)}{n}\right), \tag{3.14}$$

$$L^{\Phi}(n) \geqslant \frac{2^n}{\log n + 5} - 1 \geqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 - \frac{5 + o(1)}{\log n}\right), \tag{3.15}$$

$$L^{\mathrm{K}}(n) \geqslant \frac{2^n}{n + 3 + \log n}\left(1 + \frac{\log(n + 3 + \log n)}{n + 5 + \log n}\right) \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1 - \frac{3 + o(1)}{n}\right). \tag{3.16}$$

Следовательно, неравенство (3.10) ((3.11), (3.12)) будет справедливо для достаточно больших n при $\varepsilon(n) = \frac{\log n - 6}{n}$ (соответственно $\varepsilon(n) = \frac{6}{\log n}$, $\varepsilon(n) = \frac{4}{n}$).

Аналогичным образом на основе неравенства (3.6) и равенства (3.1) с использованием леммы 3.1, где $q = 2^{2^n}$, $y = 2^{D(n)}$, $\gamma = 0$, $\alpha = 1$ и $a = 64n$, устанавливается справедливость (3.13) при $\varepsilon(n) = \frac{12}{\log n}$.

Теорема доказана. □

Следствие 1.

$$L^{\mathrm{C}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^{\Phi}(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}, \quad L^{\mathrm{K}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$T(n) \geqslant n - \log\log n - o(1).$$

Следствие 2. *Нижние оценки* (3.10)–(3.13) *при указанных в доказательстве значениях $\varepsilon(n)$ справедливы для сложности* (*глубины*) *почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, при их реализации в соответствующих классах схем.*

Действительно, замена величины $q = 2^{2^n}$ величиной $q = \frac{1}{n}2^{2^n}$ при получении оценок (3.14)–(3.16) с помощью леммы 3.1 повлияет только на участвующие в их последних неравенствах функции вида $o(1)$. При этом, в силу (3.2), где $q = \frac{1}{n}$, а $\widehat{\Psi}$ — правая часть соответствующего неравенства (3.10)–(3.12), вновь полученная оценка будет справедлива для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$. Справедливость нижней оценки (3.13) для почти всех ФАЛ устанавливается аналогично.

Рассмотрим теперь мощностные нижние оценки для КС, ИКС, а также для СФЭ и формул в произвольном базисе Б. Следующее утверждение доказывается на основе мощностных соотношений (3.1), (3.2) и леммы 3.1 с использованием оценок §1, §2 аналогично тому, как доказывалась теорема 3.1.

Теорема 3.2. *Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon(n) \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, выполняются неравенства*

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{КС}}(n) \geqslant \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}\big(1 - \varepsilon(n)\big), \tag{3.17}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n) \geqslant \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}\big(1 + \varepsilon(n)\big), \tag{3.18}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n) \geqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}\big(1 + \varepsilon(n)\big), \tag{3.19}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{Ф}}(n) \geqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n}\big(1 - \varepsilon(n)\big), \tag{3.20}$$

$$T_{\text{Б}}(n) \geqslant \tau_{\text{Б}}\big(n - \log\log n - \varepsilon(n)\big). \tag{3.21}$$

Следствие 3.

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{КС}}(n) \gtrsim \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n) \gtrsim \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{Ф}}(n) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n},$$
$$T_{\text{Б}}(n) \geqslant \tau_{\text{Б}}\big(n - \log\log n - o(1)\big).$$

Следствие 4. *Нижние оценки* (3.17)–(3.21) *справедливы для почти всех ФАЛ из $P_2(n)$.*

§4 Обобщенное разложение мультиплексорных ФАЛ, его особенности. Универсальные множества ФАЛ, их построение и реализация

Пусть $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ — разбиение куба B^n от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$. *Обобщенная мультиплексорная ФАЛ* соответствующая разбиению Δ определяется равенством

$$\mu_\Delta(x,\ u_1, \ldots, u_p) = \bigvee_{i=1}^{p} \chi_{\delta_i}(x) u_i,$$

где χ_{δ_i} — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i. Тогда стандартную мультиплексорную ФАЛ порядка n

$$\mu_n(x,\ u_0, \ldots, u_{2^n-1}) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in B^n} K_\sigma(x) u_{\nu(\sigma)}$$

можно рассматривать как обобщённую мультиплексорную ФАЛ μ_Δ с тривиальным разбиением Δ таким, что $\delta_{\nu(\sigma)} = \{\sigma\}$ для каждого σ, $\sigma \in B^n$.

Лемма 4.1. *Для любой существенной ФАЛ $\psi(y_1, \ldots, y_p)$ и любого разбиения $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$, $d = p$, куба B^n от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$ существуют ФАЛ $g_i(x, u_i)$, $i = 1, \ldots, p$, которые монотонно или антимонотонно зависят от БП $u_1, \ldots, u_p$, такие что $\psi(g_1, \ldots, g_p) = \mu_\Delta(x,\ u_1, \ldots, u_p)$.*

Доказательство. Существенность ФАЛ ψ означает, что для любого i, $i = 1, \ldots, p$, найдутся булевские константы $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p}$ такие, что

$$\psi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\ y_i,\ \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}. \tag{4.1}$$

Значит, определив ФАЛ g_i так, что

$$g_i(\beta, u_i) = \begin{cases} \alpha_{i,j}, & \text{если } \beta \in \delta_j \text{ при } j \neq i; \\ u_i \oplus \alpha_{i,i}, & \text{если } \beta \in \delta_i; \end{cases} \tag{4.2}$$

для всякого β, $\beta \in \delta_i$, будем иметь

$$\begin{aligned} \psi\big(g_1(\beta, u_1), \ldots, g_{i-1}(\beta, u_{i-1}),\ g_i(\beta, u_i),\ g_{i+1}(\beta, u_{i+1}), \ldots, g_p(\beta, u_p)\big) = \\ = \varphi\big(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\ y_i \oplus \alpha_{i,i},\ \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}\big) = \big(y_i \oplus \alpha_{i,i}\big) \oplus \alpha_{i,i} = y_i = \\ = \mu_\Delta\big(\beta,\ u_1, \ldots, u_p\big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Из (4.1) следует, что каждая ФАЛ g_j зависит от БП u_j только на компоненте δ_j, на которой $g_j = u_j \oplus \alpha_{j,j}$. Следовательно, каждая ФАЛ g_j либо монотонно, либо антимонотонно зависит от БП u_j.

Лемма доказана. □

Замечание 1. Лемма 4.1 остаётся верна и в том случае, когда $d < p$, если при этом формально считать все недостающие компоненты разбиения Δ пустыми, то есть $\delta_{d+1} = \cdots = \delta_p = \varnothing$. Соответствующие пустым компонентам БП $y_{d+1}, \ldots, y_p$ являются фиктивными БП ФАЛ $g_{d+1}, \ldots, g_p, \mu_\Delta$.

Замечание 2. В условиях леммы для каждого j, $j = 1, \ldots, d$, положим $\sigma_j = 1$ (соответственно $\sigma_j = 0$), если ФАЛ $g_j(x, u_j)$ монотонно (соответственно антимонотонно) зависит от БП x_j. Тогда, полагая, что для $\tau = 0, 1$ ФАЛ $g_{j,\tau}(x) = g_j(x, \tau)$, получим

$$g_j(x, u_j) = g_{j,\bar{\sigma}_j}(x) \vee u_j^{\sigma_j} g_{j,\sigma_j}(x). \tag{4.4}$$

Замечание 3. В том случае, когда Δ — тривиальное разбиение куба B^n и $d = 2^n$ ФАЛ $g_{j,0}(x)$ и $g_{j,1}(x)$ отличаются друг от друга только на одном наборе значений БП x.

Напомним (см. [3]), что множество ФАЛ G называется дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) ФАЛ порядка m и ранга p, тогда и только тогда, когда $G \subseteq P_2(m)$ и для любой ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, найдутся функции $g_1, \ldots, g_p$ из G, для которых $g = g_1 \vee \cdots \vee g_p$.

Обобщим понятие ДУМ ФАЛ следующим образом. Пусть $\psi(y_1, \ldots, y_p)$ — существенная ФАЛ, то есть ФАЛ, существенно зависящая от всех своих БП. Множество ФАЛ G, $G \subseteq \subseteq P_2(m)$, называется *$\psi$-универсальным множеством* (*ψ-УМ*) *порядка* m, если любая ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = \psi(g_1, \ldots, g_p), \tag{4.5}$$

где $g_i \in G$ при всех i, $i = 1, \ldots, p$. Заметим, что в случае $\psi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 \vee \cdots \vee y_p$ понятие ψ-УМ совпадает с понятием ДУМ ранга p.

Так же, как и ДУМ (см. [3]), будем строить ψ-УМ порядка m на основе разбиения $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ единичного куба B^m, соотношений (4.1) и леммы 4.1.

Обозначим через $G^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p$, множество всех тех ФАЛ из $P_2(m)$, которые при любом i, $1 \leqslant i \leqslant p$ и $j \neq i$, равны $\alpha_{i,j}$ на множестве наборов δ_i, и пусть

$$G = G^{(1)} \cup \cdots \cup G^{(p)}. \tag{4.6}$$

Заметим, что при этом в силу (4.1)–(4.3) множество $G^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant p$, представляет собой множество всех различных ФАЛ вида $g_j(x, g(x))$, где $g(x)$ – произвольная ФАЛ из $P_2(m)$. Отсюда следует, что $\mu_\Delta(x, g(x), \ldots, g(x)) = \psi(g_1(x, g(x)), \ldots, g_p(x, g(x)) = g(x)$, то есть выполнено (4.5) и множество G представляет собой ψ-УМ порядка m, которое будем называть *стандартным ψ-УМ, связанным с разбиением* Δ. Если при этом Δ – разбиение куба B^m на p, $p = \lceil 2^m/s \rceil$, последовательных отрезков, длины которых, за исключением, возможно, последнего, равны s, $1 \leqslant s \leqslant 2^m$, то множество G будем называть *ψ-УМ порядка m и высоты s*.

Приведём пример стандартного ψ-УМ для функции $\psi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 y_{t+1} \vee y_2 y_{t+2} \vee \ldots \vee \vee y_t y_{2t}$, где $p = 2t$, связанного с разбиением куба B^m на последовательные отрезки $\delta_1, \ldots, \delta_p$ длины $s_1, \ldots, s_p$ соответственно, где $s_1 + \cdots + s_p = 2^m$. Если при этом константы в (4.1) выбрать так, что $\alpha_{i,j} = 1$ только тогда, когда $|i - j| = t$, то соответствующее стандартное ψ-УМ $\widetilde{G}$ порядка m будет иметь вид (4.6), где $G^{(j)}$ состоит из таких ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, для которых $g(\alpha) = 1$ при $\alpha \in \delta_i$, если $|i - j| = t$, и $g(\alpha) = 0$ на остальных отрезках δ_i, за исключением δ_j. Заметим, что полученное ψ-УМ $\widetilde{G}$ имеет мощность $t(2^{s'} + 2^{s''})$, если $|s_1| = \cdots = |s_t| = s'$ и $s_{t+1} = \cdots = |s_{2t}| = s''$, где $t(s' + s'') = 2^m$.

Лемма 4.2. *В условиях леммы 4.1 существует ψ-УМ G порядка m и четной высоты s такое, что*

$$|G| \leqslant p \cdot 2^s, L^A(\vec{G}) \leqslant e_A \cdot |G| + O(p \cdot 2^{m+s/2}), \tag{4.7}$$

где $A \in \{K, C\}$ и $e_K = 2$, $e_C = 4$.

Доказательство. Построим стандартное ψ-УМ G порядка m и высоты s в соответствии с (4.6) и заметим, что при этом

$$|G| \leqslant |G^{(1)}| + \cdots + |G^{(p)}| \leqslant p \cdot 2^s.$$

Для доказательства второго неравенства (4.7) достаточно реализовать систему ФАЛ $\vec{G}$ схемой Σ_G, $\Sigma_G \in \mathcal{U}^A$, построенной по методу каскадов, используя в качестве первой БП разложение ФАЛ из G БП x_m. Действительно, на реализацию указанного разложения любой ФАЛ из G потребуется не более e_A элементов, число различных «остаточных» ФАЛ такого разложения для всех ФАЛ из G в силу четности s будет не больше, чем $p \cdot 2^{s/2}$, а сложность каждой из «остаточных» ФАЛ не превосходит, очевидно, $O(2^m)$.

Лемма доказана. □

§5 Асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ и ИКС в произвольном базисе

Используем построенные выше стандартные ψ-УМ для синтеза СФЭ в базисе Б, Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^b$. В силу полноты базиса Б в $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ существуют формулы $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$ и $\mathcal{F}_{\neg}$, реализующие ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x}_1$ соответственно, которыми мы будем заменять ФЭ базиса Б$_0$ при синтезе схем на основе конъюнктивных и дизъюнктивных представлений.

Теорема 5.1 (ср. [3]). *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, такая, что*

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{3\log n + O(1)}{n}\right). \tag{5.1}$$

Доказательство. Найдём среди ФЭ базиса Б, Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^b$, элемент $\mathcal{E}_j$, на котором достигается приведённый вес $\rho_j = \rho_{\text{Б}}$ (см. §1), то есть

$$\rho_j = \frac{\mathcal{L}_j}{k_j - 1} = \min_{k_i \geqslant 2} \rho_i = \rho_{\text{Б}}. \tag{5.2}$$

Пусть, далее, m, s, t, p— натуральные числа такие, что

$$p = t(k_j - 1) + 1, \tag{5.3}$$

$$k_j \leqslant \frac{2^m}{s} \leqslant p < \frac{2^m}{s} + (k_j - 1), \tag{5.4}$$

Построим из t ФЭ $\mathcal{E}_j$ бесповторную формулу $\mathcal{F}_t$ с p входами, которая имеет вид квазиполного l-ярусного, $l = \lceil \log_k p \rceil$, дерева и реализует ФАЛ $\psi(y_1, \ldots, y_p)$. Пусть G, $G \subseteq P_2(m)$,— стандартное ψ-УМ порядка m и высоты s. Построим по лемме 4.2 реализующую систему ФАЛ $\vec{G}$ СФЭ из $\mathcal{U}^{\text{С}}$, а затем путем замены ее ФЭ $\&, \vee, \neg$ схемами $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\neg}$ получим эквивалентную ей СФЭ Σ_G из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$ такую, что

$$\mathcal{L}(\Sigma_G) = O(p \cdot 2^s + p \cdot 2^{m+s/2}). \tag{5.5}$$

Путем аналогичного моделирования мультиплексорной СФЭ порядка $(n - q)$ от адресных БП x'' в стандартном базисе, которая имеет сложность не больше, чем $4 \cdot 2^{n-q}$ (см., например, [1]), построим эквивалентную ей СФЭ Σ_G из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$:

$$\mathcal{L}(\Sigma'') = O(2^{n-q}). \tag{5.6}$$

Искомая СФЭ Σ_f строится, как обычно, на основе разложения ФАЛ $f(x_1,\ldots,x_n)$ по переменным $x''=(x_{q+1},\ldots,x_n)$

$$f(x',x'')=\bigvee_{\sigma''\in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'')\cdot f_{\sigma''}(x'), \tag{5.7}$$

где $q=m$, $x'=(x_1,\ldots,x_q)$, а $f_{\sigma''}(x')=f(x',\sigma'')$. При этом для реализации каждой ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma''\in B^{n-q}$, используется её представление

$$f_{\sigma''}(x')=\psi(g_{\sigma'',1},\ldots,g_{\sigma'',p}), \tag{5.8}$$

где ФАЛ $g_{\sigma'',1},\ldots,g_{\sigma'',p}$ берутся из множества G.

Пусть, далее, СФЭ Σ' содержит СФЭ Σ_G в качестве подсхемы и для каждого σ'', $\sigma''\in$ $\in B^{n-q}$, реализует ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ в соответствии с (5.8), используя для этого формулу $\mathcal{F}_t$. Схема Σ_f представляет собой суперпозицию вида $\Sigma_f=\Sigma'(\Sigma'')$, где СФЭ Σ'' — мультиплексор порядка $(n-q)$ от БП x'', и реализует ФАЛ f в соответствии с (5.7). Сложность построенной СФЭ Σ_f, $\Sigma_f\in\mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, с учётом (5.5)–(5.6) будет удовлетворять неравенству

$$\mathcal{L}(\Sigma_f)\leqslant\mathcal{L}_j\cdot t\cdot 2^{n-m}+O\bigl(2^{n-m}+p\cdot 2^s+p\cdot 2^{s/2+m}\bigr), \tag{5.9}$$

из которого при

$$m=q=\lceil 2\log n\rceil,\quad s=2\left\lceil\frac{n-3\log n}{2}\right\rceil \tag{5.10}$$

и при значениях остальных параметров, определённых из (5.3)–(5.4), следует (5.1).

Теорема доказана. □

Следствие.

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n)\sim\rho_{\text{Б}}\frac{2^n}{n}.$$

Теорема 5.2. *Для любой ФАЛ f, $f\in P_2(n)$, существует реализующая её ИКС $\widehat{\Sigma}_f$, $\widehat{\Sigma}_f\in\mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$, такая, что*

$$\mathcal{L}(\widehat{\Sigma}_f)\leqslant\hat{\rho}_{\text{Б}}\frac{2^n}{n}\left(1+\frac{3\log n+O(1)}{n}\right). \tag{5.11}$$

Доказательство. Найдём среди ФПЭ базиса Б, Б $=\{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^b$, элемент $\mathcal{K}_j$, для которого $\hat{\rho}_j=\hat{\rho}_{\text{Б}}$ (см. §2), то есть

$$\hat{\rho}_j=\frac{\mathcal{L}_j}{k_j+1}=\min_{1\leqslant i\leqslant b}\hat{\rho}_i=\hat{\rho}_{\text{Б}}.$$

Пусть, далее, m,s,t,p — натуральные числа такие, что

$$p=t(k_j+1),$$
$$k_j\leqslant\frac{2^m}{s}\leqslant p<\frac{2^m}{s}+k_j.$$

Пусть $(t,1)$-КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ над базисом Б представляет собой «звезду» из t управляемых непересекающимися наборами БП $y^{(1)},\ldots,y^{(t)}$ длины k_j контактов $\mathcal{K}_j$. При этом центр звезды

является выходом КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$, а её концевые вершины — проводящими входами $\widehat{\mathcal{F}}_t$, помеченными различными БП набора $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_t^{(0)})$. Таким образом, КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ реализует ФАЛ

$$\widehat{\psi}(y_1, \ldots, y_p) = y_1^{(0)} \cdot \varphi_j\big(y^{(1)}\big) \vee \ldots \vee y_t^{(0)} \cdot \varphi_j\big(y^{(t)}\big).$$

Обозначим через $\widehat{G}$ стандартное $\widehat{\psi}$-УМ порядка m и высоты s, построенное на основе соответствующего разбиения куба B^m так, что для любого набора $(g^{(1)}, \ldots, g^{(t)})$, составленного из ФАЛ G и связанного с набором БП $y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(t)})$ и любого набора $\alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(t)})$ значений БП y не более одной из ФАЛ $\varphi_j\big(g^{(i)}(\alpha^{(i)})\big)$, где $i = 1, \ldots, t$, обращается в 1.

Построим ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ аналогично тому, как строилась СФЭ Σ_f при доказательстве теоремы 5.1, на основе разложений (5.7) и (5.8) с использованием ФАЛ $\widehat{\psi}$ вместо ФАЛ ψ, ИКС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ вместо формулы $\mathcal{F}_t$ и множества $\widehat{G}$ вместо множества G.

Пусть $\lambda = |\widehat{G}|$ и пусть $(1, \lambda)$-КС $\widehat{\Sigma}_G$ построена по лемме 4.2 из контактов базиса Б, моделирующих замыкающий и размыкающий контакты стандартного базиса (см. §2), реализует систему из ФАЛ множества $\widehat{G}$ и имеет сложность

$$\mathcal{L}\big(\widehat{\Sigma}_{\widehat{G}}\big) \leqslant O(t \cdot 2^s + t \cdot 2^{m+s/2}). \tag{5.12}$$

Заметим также, что в силу $\widehat{\psi}$-универсальности множества ФАЛ $\widehat{G}$ для любой ФАЛ $g(x')$ справедливо представление

$$g\big(x'\big) = \widehat{\psi}\big(g_1, \ldots, g_p\big) \tag{5.13}$$

где $g_j \in \widehat{G}$ для всех j, $j = 1, \ldots, p$. Для реализации данного представления достаточно входы $y_1, \ldots, y_p$ КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ присоединить к выходам КС $\widehat{\Sigma}_G$ в соответствии с (5.13), причём указанная реализация является корректной суперпозицией соответствующих схем в силу отмеченных выше свойств ортогональности ФАЛ из G, подставляемых вместо БП из y.

Пусть ИКС $\widehat{\Sigma}'$ от БП x' содержит в качестве подсхемы КС $\widehat{\Sigma}_G$ и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих 2^{n-q} выходов согласно (5.13), используя для этого схему $\widehat{\mathcal{F}}_t$, входы которой присоединены к выходам $\widehat{\Sigma}_G$ соответствующим образом.

Искомая ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ содержит ИКС $\widehat{\Sigma}'$ в качестве подсхемы и представляет собой результат корректной суперпозиции вида $\Sigma_f = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где $\widehat{\Sigma}''$ — $(2^{n-q}, 1)$-КС, моделирующая в базисе Б контактное дерево от БП x'', входы (листья) которого присоединены к выходам $\widehat{\Sigma}'$ в соответствии с (5.7).

Сложности ИКС $\widehat{\Sigma}'$ и КС $\widehat{\Sigma}''$ удовлетворяют неравенствам

$$\mathcal{L}\big(\widehat{\Sigma}'\big) \leqslant \mathcal{L}\big(\widehat{\Sigma}_{\widehat{G}}\big) + 2^{n-q} \cdot t \cdot \mathcal{L}_j, \qquad \mathcal{L}\big(\widehat{\Sigma}''\big) \leqslant O(2^{n-q})$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}\big(\Sigma_f\big) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot 2^{n-q} \cdot t + O\big(2^{n-q}\big) + O\big(2^s \cdot t + t \cdot 2^{q+s/2}\big).$$

Оценка (5.11) получается из последнего неравенства при тех же значениях параметров, что и в теореме 5.1, при которых, начиная с достаточно большого n, выполнены все необходимые соотношения.

Теорема доказана. □

Следствие. *Из* (5.11) *с учётом нижней оценки §3 вытекает соотношение*

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n) \sim \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

§6 Асимптотически наилучший метод синтеза формул и контактных схем в произвольном базисе

При синтезе СФЭ в базисе Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$ мы использовали некоторые формулы $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$ и $\mathcal{F}_{\neg}$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, реализующие ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x}_1$ соответственно, для моделирования конъюнктивных и дизъюнктивных представлений ФАЛ. При этом возможность такого моделирования и его сложность не налагали на данные формулы каких-либо структурных или параметрических ограничений. В то же время при использовании формул $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\neg}$ для аналогичного моделирования конъюнктивных и дизъюнктивных представлений ФАЛ в классе $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ необходимо обеспечить отсутствие «внутренних» ветвлений в получающихся схемах за счёт определенных ограничений на их структуру.

Напомним, что БП, встречающаяся в записи формулы только один раз, считается *бесповторной* БП этой формулы и что формула, все БП (соответственно, все существенные БП) которой бесповторны, называется *бесповторной* (соответсвенно, *квазибеспоторной*). В [3] было доказано следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Существуют квазибесповторные формулы $\mathcal{F}_{\neg}$, $\mathcal{F}_{\&}$ и $\mathcal{F}_{\vee}$ над базисом* Б*, которые реализуют ФАЛ $\overline{x}_1$, $x_1 \cdot x_2$ и $x_1 \vee x_2$ соответственно.*

Напомним, далее, что (см., например, [3]) множество δ, $\delta \subseteq B^q$ называется *m-регулярным* множеством наборов куба B^q, если $m < q$, $|\delta| = 2^m$ и все префиксы[1] длины m наборов из δ различны. Заметим, что m-регулярному множеству δ, $\delta \subseteq B^q$, можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор $\alpha = (\beta, \gamma)$, где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $g(\beta) = \gamma$. Заметим также, что любая ФАЛ g, $g \in P_2(q)$, совпадает на m-регулярном множестве наборов δ, $\delta \subseteq B^q$, с некоторой ФАЛ из $P_2(m)$, если рассматривать $P_2(m)$ как множество всех ФАЛ из $P_2(q)$ с несущественными БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$. При этом любая ФАЛ из связанной с δ системы функций совпадает на δ с соответствующей БП куба B^q.

Распространим операцию сложения двоичных наборов (слов) по модулю 2 на тот случай, когда длина второго слагаемого может быть больше длины первого. Для наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in B^m$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B^n$, где $n \geqslant m$, определим их сумму $\alpha \oplus \beta$ как набор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in B^n$, который представляет собой поразрядную сумму по модулю 2 префикса длины n набора $(\alpha, \ldots, \alpha) \in B^a$, где $a = \lceil n/m \rceil$, с набором β и заметим, что при этом уравнение $\alpha \oplus \beta = \gamma$ имеет единственное относительно β решение при любых α, $\alpha \in B^m$, и γ, $\gamma \in B^n$.

На основе введённой операции при любых β, $\beta \in B^t$, и $\lambda \leqslant t$ обычным образом определяется сумма $\delta \oplus \beta$, где $\delta \subseteq B^\lambda$, а также сумма $g \oplus \beta$, где $g = (g_1, \ldots, g_\lambda) \in P_2^\lambda(m)$.

[1] Для слова (набора) α вида $\alpha = \beta\gamma$ слово β (γ) считается его *префиксом* (соответственно *суффиксом*).

При этом последняя сумма является набором длины t, который по-прежнему состоит из ФАЛ системы g или их отрицаний и задаёт m-регулярное множество наборов куба B^t. Заметим также, что любая ФАЛ системы g хотя бы один раз входит в систему $g \oplus \beta$ без отрицания, если для каждого i, $i = 1, \ldots, \lambda$, хотя бы один из разрядов набора β с номером $i + \lambda \cdot j$, где $0 \leqslant j \leqslant \lceil t/\lambda \rceil$ и $\lambda \cdot j \leqslant t$, равен 0.

Пусть $G \subseteq P_2(m)$ и $|G| = \lambda$, а $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$, где $q > m$, — разбиение куба B^q на m-регулярные компоненты. Будем говорить, что разбиение Δ *моделирует ФАЛ из* G *с помощью БП или их отрицаний*, если для любого i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, любая ФАЛ g, $g \in G$, совпадает на δ_i с некоторой буквой x_j^σ, где $1 \leqslant j \leqslant q$ и $\sigma \in B$. Компонента δ_i считается при этом *хорошей компонентой* разбиения Δ (относительно множества G) в том случае, когда для любой ФАЛ g, $g \in G$, указанное совпадение имеет место при $\sigma = 1$.

Лемма 6.2. *Пусть $G \subseteq P_2(m)$, $|G| = \lambda$, $q = m + a\lambda$ и пусть δ_i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, — m-регулярное разбиение куба B^q, которое соответствует системе ФАЛ $\overrightarrow{G} \oplus \beta$, где $\beta \in B^{q-m}$ и $\nu(\beta) = i - 1$. Тогда система множеств $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ образует m-регулярное разбиение куба B^q, которое моделирует ФАЛ из G с помощью БП или их отрицаний и имеет при этом долю «плохих» компонент не больше, чем $\frac{\lambda}{2^a}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что система множеств Δ является разбиением куба B^q. Для этого в силу того, что мощность каждого из них равна 2^m, достаточно убедиться в том, что Δ — покрытие куба B^q, то есть любой набор γ, $\gamma \in B^q$, входит хотя бы в одно из множеств δ_i, $i \in [1, 2^{q-m}]$.

Действительно, представим набор γ в виде $\gamma = (\alpha, \hat{\gamma})$, где $\alpha \in B^m$, и найдём набор β, $\beta \in B^{q-m}$, который является единственным решением уравнения $\overrightarrow{G}(\alpha) \oplus \beta = \hat{\gamma}$. Следовательно, $\gamma \in \delta_i$, где $\nu(\beta) = i - 1$, и система множеств Δ является разбиением куба B^q.

Заметим, что в силу отмеченных выше свойств операции сложения по модулю 2, разбиение Δ обладает всеми необходимыми для моделирования множества ФАЛ G свойствами, и что при этом число его «плохих» компонент не больше, чем $\lambda \cdot 2^{q-m-a}$.

Лемма доказана. □

Теорема 6.1. *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ существует реализующая её формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{Ф}}$, такая, что*

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{F}_f\big) \leqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n} \Big(1 + \frac{\log\log n \pm O(1)}{\log n}\Big). \tag{6.1}$$

Доказательство. Выберем ФЭ $\mathcal{E}_j$, введём натуральные параметры m, s, t, p, l, λ и определим разбиение Π, формулу $\mathcal{F}_t$, ФАЛ ψ, ψ-УМ G порядка m так, как это было сделано в доказательстве теоремы 5.1 и так, чтобы выполнялись соотношения (4.7) и (5.2)–(5.5).

Выберем, далее, натуральные параметры q и r так, что

$$q = m + a\lambda \leqslant n \tag{6.2}$$

и построим по лемме 6.2 для множества ФАЛ G соответствующее m-регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x' = (x_1 \ldots x_q)$. Заметим, что для произвольной

ФАЛ $g(x')$ и любого i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, в силу ψ-универсальности множества G, m-регулярности разбиения Δ и возможности моделировать ФАЛ из G на компонентах Δ с помощью БП или их отрицаний всегда найдутся такие натуральные числа $j_1, \ldots, j_p$ из $[m+1, q]$ и булевы константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, которые равны 1, если δ_i — «хорошая» компонента, и для которых равенство

$$g(x') = \psi\big(x_{j_1}^{\alpha_1}, \ldots, x_{j_p}^{\alpha_p}\big) \tag{6.3}$$

выполняется на любом наборе из δ_i.

Возьмём (см. (5.7)) разложение ФАЛ f по БП $x'' = (x_{q+1} \ldots x_n)$ и продолжим его на основе (6.3) так, что

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot f_{\sigma''}(x') = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x_i) \cdot \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot \psi\big(x_{j_{1,i,\sigma''}}^{\alpha_{1,i,\sigma''}}, \ldots, x_{j_{j,i,\sigma''}}^{\alpha_{p,i,\sigma''}}\big), \tag{6.4}$$

где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i разбиения Δ. Искомая формула $\mathcal{F}_f$ получается из последнего представления (6.4) ФАЛ f следующим образом:

1) характеристическая ФАЛ χ_i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, реализуется по своей совершенной ДНФ;

2) мультиплексорная ФАЛ μ_{n-q} порядка $(n-q)$ от адресных БП x'', связанная с разложением f по этим БП, реализуется с помощью бесповторной по информационным БП формулы из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$ сложности не больше, чем $4 \cdot 2^{n-q}$ (см. [3]);

3) каждая ФАЛ вида (6.3) реализуется одной формулой $\mathcal{F}_p$ с необходимыми инверсиями её БП в случае «плохой» компоненты δ_i;

4) все используемые при реализации формул из пунктов 1-3 элементы базиса Б_0 заменяются соответствующими им бесповторными формулами $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\neg}$ из леммы 6.1.

Для сложности построенной таким образом формулы $\mathcal{F}_f$ будет (ср. с (5.9)) справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}_f) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot t \cdot 2^{n-m} + O\big(2^{n-m}\big(1 + \frac{t \cdot \lambda}{2^a}\big) + q \cdot 2^q\big), \tag{6.5}$$

которое при значениях параметров

$$m = \lfloor 3 \log\log n \rfloor, \qquad s = \lfloor \log n - 3 \log\log n \rfloor - 1, \qquad a = \lceil \log n \rceil - 1$$

удовлетворяющих при достаточно больших n условиям (6.2), даёт оценку (6.1).

Теорема доказана. □

Теорема 6.2. *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её КС Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$, такая, что*

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)\right). \tag{6.6}$$

Доказательство. Найдём среди ФПЭ базиса Б, Б $= \{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^{b}$, элемент $\mathcal{K}_j$, для которого $\mathcal{L}_j = \pi_{\text{Б}}$ (см. §2), то есть

$$\mathcal{L}_j = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \mathcal{L}_i = \pi_{\text{Б}}.$$

Пусть для определённости, из базисной ФАЛ φ_j (см. §2) подстановкой констант можно получить ФАЛ x_1, а из ФАЛ φ_r, $1 \leqslant r \leqslant b$, — ФАЛ $\overline{x}_1$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$ получающиеся при этом из $\mathcal{K}_j$ и $\mathcal{K}_r$ замыкающий и размыкающий контакты соответственно и положим $\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_j$, $\check{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_r$.

Будем строить КС Σ_f из контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$ в соответствии с асимптотически наилучшим методом синтеза КС в стандартном базисе (см. [3, Гл. 4, §7]) с использованием леммы 6.2, для того, чтобы долю контактов $\check{\mathcal{K}}$ в Σ_f можно было сделать бесконечно малой.

Пусть m, s и t — натуральные числа такие, что

$$s \leqslant 2^m, \qquad t = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \tag{6.7}$$

а $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_t)$ — разбиение куба B^m на последовательные отрезки длины не больше чем s. Обозначим через G стандартное ДУМ порядка m и ранга t от БП $(x_1, \ldots, x_m)$, которое связано с разбиением Π, и пусть

$$\lambda = |G| \leqslant t \cdot 2^s, \tag{6.8}$$

а $h_1, \ldots, h_t$ — входящие в него характеристические ФАЛ отрезков $\pi_1, \ldots, \pi_t$ соответственно. Напомним, что при этом $G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(t)}$, где $G^{(i)}$, $i = 1, \ldots, t$, состоит из всех ФАЛ g, для которых $g \leqslant h_i$.

Введём натуральный параметр a, положим

$$q = m + a \cdot \lambda \leqslant n \tag{6.9}$$

и рассмотрим разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x' = (x_1, \ldots, x_q)$ на m-регулярные компоненты, построенное по лемме 6.2 для системы ФАЛ $h = (h_1, \ldots, h_t)$.

Пусть по-прежнему (см. §5) $\widehat{\mathcal{F}}_t$ — $(t, 1)$-КС из t контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ от БП $y^{(0)} = (y_1, \ldots, y_t)$, соответствующих её «проводящим» входам и БП $y^{(1)} = (y_{t+1}, \ldots, y_{2t})$, управляющих её контактами, которая реализует ФАЛ

$$\widehat{\psi}\big(y^{(0)}, y^{(1)}\big) = y_1 y_{t+1} \vee \ldots \vee y_t y_{2t}.$$

Заметим, что любая ФАЛ $g(x')$ на любой компоненте δ_i разбиения Δ совпадает с ФАЛ

$$g_i(x') = \widehat{\psi}\big(g_{i,1}, \ldots, g_{i,t},\ x_{j_{i,1}}^{\tau_{i,1}}, \ldots, x_{j_{i,t}}^{\tau_{i,t}}\big), \tag{6.10}$$

где $g_{i,r} \in G^{(r)}$, $m+1 \leqslant j_{i,r} \leqslant q$ и $\tau_{i,r} \in B$ при всех r, $r = 1, \ldots, t$, причём $\tau_{i,1} = \ldots = \tau_{i,t} = 1$, если δ_i — «хорошая» компонента.

Полагая, как и раньше, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$, разложим реализуемую ФАЛ $f(x', x'')$ следующим образом

$$f(x', x'') = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \big(\bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot f_{\sigma'',i}(x') \big), \tag{6.11}$$

где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i, $i = 1, \ldots, 2^t$, а ФАЛ $f_{\sigma'',i}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, имеет вид правой части равенства (6.10) для ФАЛ $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$.

Пусть $(1, \lambda)$-КС Σ_G, построенная из контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$, реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{G}$ на основе совершенных ДНФ входящих в неё ФАЛ с использованием контактного дерева от БП $(x_, \ldots, x_m)$ со сложностью

$$\mathcal{L}\big(\Sigma_G\big) \leqslant \big(\widehat{\mathcal{L}} + \check{\mathcal{L}}\big) \cdot 2^m. \tag{6.12}$$

Пусть, далее, для каждого i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, $(1, 2^{n-q})$-КС Σ'_i содержит КС Σ_G в качестве своей подсхемы и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma'',i}$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих выходов в соответствии с (6.10). Для этого используется либо КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$, если δ_i — «хорошая» компонента, либо КС, которая получается из $\widehat{\mathcal{F}}_t$ заменой части контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ контактами $\check{\mathcal{K}}$, в остальных случаях. Заметим, что указанные схемы являются разделительными по входам на компоненте δ_i, что обеспечивает корректность применяемых операций суперпозиции на ней. Определим $(1, 2^{n-m})$-КС Σ' как КС, которая получается отождествлением входов у всех КС Σ'_i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, и реализует на своих 2^{n-m} выходах все ФАЛ вида $f_{\sigma'',i}(x')$.

Рассмотрим теперь $(2^{q-m}, 1)$-КС $\widetilde{\Sigma}$, которая получается из $(2^q, 1)$-КД от БП x' отождествлением для каждого i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, тех его листьев, которые соответствуют конъюнкциям вида $x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_q^{\sigma_q}$, где $(\sigma_1, \ldots, \sigma_q) \in \delta_i$. Построим, наконец, $(2^{n-m}, 1)$-КС Σ'', которая получается в результате присоединения к каждому входу КС $\widetilde{\Sigma}$ выхода (корня) $(2^{n-q}, 1)$-контактного дерева от БП x''. Заметим, что все операции суперпозиции, использованные при построении КС Σ'', являются корректными и поэтому Σ'' разделительна по входам, а система ФАЛ проводимости между её входами и выходом состоит из всех ФАЛ вида $\chi_i(x') \cdot K_{\sigma''}(x'')$, где $i \in [1, 2^{q-m}]$ и $\sigma'' \in B^{n-q}$.

Искомая КС Σ_f содержит КС Σ' в качестве подсхемы и представляет собой результат суперпозиции вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, при выполнении которой входы Σ'' присоединяются к выходам Σ' в соответствии с (6.11). В силу разделительности КС Σ'' по входам указанная суперпозиция является корректной и поэтому КС Σ_f действительно реализует ФАЛ f.

Из (6.7)–(6.9) и (6.12) с учётом того, что число контактов в контактном дереве от d БП равно $2^{d+1} - 2$, вытекает неравенство (ср. с (6.5))

$$\mathcal{L}\big(\Sigma_f\big) \leqslant \widehat{\mathcal{L}} \cdot 2^{n-m} \cdot t + O\big(2^q + 2^{n-m}\big(1 + \frac{t \cdot \lambda}{2^a}\big)\big).$$

Оценка (6.6) получается из последнего неравенства при следующих значениях параметров

$$a = \lfloor \log n \rfloor, \qquad m = \left\lfloor \frac{3}{2} \log n \right\rfloor, \qquad s = \lceil n - 3a\sqrt{n} \rceil,$$

при которых, начиная с достаточно большого n, выполнены все необходимые соотношения и, в частности, неравенства (6.9).

Теорема доказана. □

Следствие. *Из* (6.6) *с учётом нижней оценки §3 вытекает соотношение*

$$L_{\text{Б}}^{\text{К}}(n) \sim \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

§7 Поведение функции Шеннона для задержки ФАЛ в произвольном базисе. Синтез СФЭ асимптотически оптимальных как по сложности, так и по задержке

Рассмотрим вопросы оптимизации по глубине (задержке) формул или СФЭ в произвольном базисе, реализующих мультиплексорные ФАЛ, а также вопросы получения достаточно точных оценок функции Шеннона для задержки ФАЛ.

Заметим, что любую ФАЛ g от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$ можно получить в результате подстановки набора констант $\tilde{\beta}_g$, являющегося столбцом ее значений, вместо набора БП $u = (u_0, \ldots, u_{2^n-1})$ в ФАЛ $\mu_n(x, u)$, то есть

$$g(x) = \mu_n(x, \tilde{\beta}_g). \tag{7.1}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$T_{\text{Б}}(n) \leqslant T_{\text{Б}}(\mu_n) + c_5, \tag{7.2}$$

где $c_5 = \max\{T_{\text{Б}}(0), T_{\text{Б}}(1)\}$.

Теорема 7.1. *Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $u = (u_0, \ldots, u_{2^n-1})$, где $n = 1, 2, \ldots,$ — наборы БП. Тогда в $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ существует бесповторная по БП из u формула $\mathcal{F}_n(x, u)$, реализующая ФАЛ $\mu_n(x, u)$ и такая, что*

$$T(\mathcal{F}_n) \leqslant \tau_{\text{Б}} \cdot n + c_6 \log n, \mathcal{L}(\mathcal{F}_n) \leqslant c_7 n 2^n. \tag{7.3}$$

Доказательство. Искомые формулы $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, будем строить индуктивно на основе дихотомии набора ее адресных БП. Пусть:

1. $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ и, тем самым, $x = (x', x'')$;
2. $v = (v_0, \ldots, v_{2^m-1})$ и $u = (u_0, \ldots, u_{2^n-1}) = (u^{(0)}, \ldots, u^{(2^m-1)})$ — наборы информационных БП, где $u^{(i)}$, $i = 0, \ldots, 2^m - 1$, — наборы из 2^{n-m} подряд идущих БП набора u.

Легко видеть, что при этом

$$\mu_n(x, u) = \mu_m\big(x', \mu_{n-m}(x'', u^{(0)}), \ldots, \mu_{n-m}(x'', u^{(2^m-1)})\big). \tag{7.4}$$

Напомним (см. лемму 6.1), что $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$ и $\mathcal{F}_{\neg}$ — бесповторные по существенным БП формулы из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, реализующие ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\bar{x}_1$ соответственно, для которых

$$\max\{T(\mathcal{F}_{\&}), T(\mathcal{F}_{\vee}), T(\mathcal{F}_{\neg})\} = c_8, \max\{\mathcal{L}(\mathcal{F}_{\&}), \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\vee}), \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\neg})\} = c_9.$$

Построим, кроме того, в базисе Б формулы $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$, реализующие константы 0 и 1 соответственно такие, что

$$\max\{T(\mathcal{F}_0), T(\mathcal{F}_1)\} = c_5, \max\{\mathcal{L}(\mathcal{F}_0), \mathcal{L}(\mathcal{F}_1)\} = c_{10}.$$

Далее положим:

1. $\mathcal{E}_r$ — функциональный элемент Б такой, что $\tau_r = \tau_{\text{Б}}$;

2. $t = \left\lceil \frac{2^m-1}{k_r-1} \right\rceil$, $p = t(k_r-1)+1 \geqslant 2^m$ и $l = \lceil \log_{k_r} p \rceil$;

3. Формула Ф представляет собой квазиполное l-ярусное k_r-ичное дерево с p листьями, построенное из t ФЭ $\mathcal{E}_r$, и реализует существенную ФАЛ $\psi(y_1, \ldots, y_p)$.

По лемме 4.1 найдем такие ФАЛ $g_j(x', v_j)$, $j = 0, \ldots, 2^m - 1$, и ФАЛ $g_j(x')$, $j = 2^m, \ldots, (p-1)$, для которых

$$\mu_m(x, v) = \psi\big(g_0(x', v_0), \ldots, g_{2^m-1}(x', v_{2^m-1}), g_{2^m}(x'), \ldots, g_{p-1}(x')\big). \tag{7.5}$$

При этом в силу замечаний 2 и 3 к лемме 4.1 ФАЛ $g_j(x', v_j)$ для каждого j, $j = 0, \ldots, 2^m - 1$, и соответствующего ему булевского значения α_j имеет вид

$$g_j(x', v_j) = \hat{g}_j(x') \vee K_j(x') \cdot v_j^{\alpha_j}, \tag{7.6}$$

где $K_j(x')$ — элементарная конъюнкция ранга n от БП x', обращающаяся в единицу на том (единственном) наборе значений БП x', на котором отличаются ФАЛ $g_j(x', 0)$ и $g_j(x', 1)$, а $\hat{g}_j(x')$ — минимальная из этих ФАЛ.

Тогда в качестве искомой формулы $\mathcal{F}_n(x, u)$ можно взять формулу, которая получается в результате следующих преобразований правой части равенства (7.5):

1. заменой ФАЛ ψ формулой Ф;

2. заменой каждой ФАЛ $g_j(x', v_j)$, $j = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$, на правую часть (7.6) с подстановкой вместо ФАЛ $\hat{g}_j$ формулы $\mathcal{F}_m(x', \tilde{\beta}_{\hat{g}_j})$ согласно (7.1) и использованием формул $\mathcal{F}_\&$, $\mathcal{F}_\vee$, $\mathcal{F}_\neg$ и $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ вместо ФЭ базиса Б_0 и констант соответственно;

3. подстановкой формулы $\mathcal{F}_{n-m}(x'', u^{(j)})$ вместо БП v_j, $j = 0, \ldots, 2^m - 1$.

Полученная таким образом формула $\mathcal{F}_n(x, u)$ будет реализовывать ФАЛ $\mu_n(x, u)$ в соответствии с (7.4) –(7.6). Из ее построения, а также описания введенных выше параметров и констант вытекают неравенства:

$$T(\mathcal{F}_n) \leqslant l \cdot T_r + \max\Big\{T(\mathcal{F}_m) + c_5, \max\Big\{\big(\lceil \log m \rceil + 2\big)c_8, T(\mathcal{F}_{n-m}) + 2c_8\Big\}\Big\} + c_8, \tag{7.7}$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}_n) \leqslant t \cdot L_r + 2^m\big(\mathcal{L}(\mathcal{F}_m) + c_{10} \cdot 2^m + \mathcal{L}(\mathcal{F}_{n-m}) + (2m-2) \cdot c_9\big) + \big(p - 2^m\big)\big(\mathcal{L}(\mathcal{F}_m) + c_{10} \cdot 2^m\big). \tag{7.8}$$

Из (7.7) с учетом того, что $m \leqslant n - m$ и

$$T(\mathcal{F}_{n-m}) \geqslant c_{11}(n-m) \geqslant \lceil \log m \rceil \cdot c_8,$$

если $n \geqslant c_{12}$, получим, что при $n \geqslant c_{12}$ выполняется неравенство

$$T(\mathcal{F}_n) \leqslant \tau_{\text{Б}} m + c_{13} + T(\mathcal{F}_{n-m}),$$

из которого следует, что

$$T(\mathcal{F}_n) - \tau_{\text{Б}} n \leqslant T(\mathcal{F}_{n-m}) - (n-m) \cdot \tau_{\text{Б}} + c_{13}. \tag{7.9}$$

Из (7.8), в свою очередь, вытекает неравенство

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}_n) \leqslant 2^m (2\mathcal{L}(\mathcal{F}_{n-m}) + c_{14} \cdot 2^{n-m}),$$

из которого следует, что

$$\frac{\mathcal{L}(\mathcal{F}_n)}{2^n} \leqslant \frac{2\mathcal{L}(\mathcal{F}_{n-m})}{2^{n-m}} + c_{14}. \tag{7.10}$$

Пусть $k = \lceil \log n \rceil$, $n = n_0$, $m = m_0$ и пусть $n_i = \left\lceil \frac{n_{i-1}}{2} \right\rceil$, $m_i = \left\lfloor \frac{n_i}{2} \right\rfloor$ для всех i, $i = 1, \ldots, k$. Легко видеть, что при этом $n_i \leqslant 2^{k-i}$ для всех указанных значений i и, в частности, $n_k = m_k = 1$. Заметим, что в силу (7.9) для всех $i = 0, \ldots, k_0$, где $n_{k_0} \geqslant c_{12}$ будут выполняться неравенства

$$T(\mathcal{F}_{n_i}) - \tau_{\text{Б}} n_i \leqslant T(\mathcal{F}_{n_{i+1}}) - \tau_{\text{Б}} \cdot n_{i+1} + c_{13},$$

из которых следует первое неравенство (7.3).

Аналогичным образом из неравенства (7.10) выводится цепочка неравенств

$$\frac{\mathcal{L}(\mathcal{F}_n)}{2^n} \leqslant c_{14} + 2\frac{\mathcal{L}(\mathcal{F}_{n_1})}{2^{n_1}} \leqslant c_{14} + 2\Big(c_{14} + \frac{\mathcal{L}(\mathcal{F}_{n_2})}{2^{n_2}}\Big) \leqslant \ldots \leqslant c_{14}\Big(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-3} + \frac{\mathcal{L}(\mathcal{F}_{n_{k-2}})}{2^{n_{k-2}}}\Big) \leqslant c_7 \cdot n,$$

которая доказывает второе неравенство (7.3).

Теорема доказана. □

Следствие. *В силу* (7.2) *и нижней оценки теоремы 3.2 имеют место неравенства*

$$\tau_{\text{Б}}(n - \log\log n - o(1)) \leqslant T_{\text{Б}}(n) \leqslant \tau_{\text{Б}} n + O(\log n).$$

Теорема 7.2. *При всех $n = 1, 2, \ldots$ для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее СФЭ Σ_f такая, что*

$$T(\Sigma_f) \lesssim \tau_{\text{Б}} \cdot n, \mathcal{L}(\Sigma_f) \lesssim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Искомая СФЭ Σ_f строится аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 5.1, с той лишь разницей, что в качестве СФЭ Σ'', реализующей ФАЛ μ_{n-q} от адресных БП x'', используется формула $\mathcal{F}_{n-q}$, построенная по теореме 7.1.

При этом параметры m, q, s выбираются так, чтобы по-прежнему выполнялось соотношение $\mathcal{L}(\Sigma'') = o\big(\frac{2^n}{n}\big)$. Достаточно, например, положить

$$q = m = \lceil 2\log n \rceil, \ s = \lceil n - 4\log n \rceil.$$

Теорема доказана. □

Следствие. *Для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, можно построить реализующую ее СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\text{C}}$, с асимптотически оптимальными как по сложности, так и по задержке значениями.*

Глава 2

Некоторые вопросы надёжности схем из функциональных элементов

§1 Вероятностное описание источников помех и повреждений СФЭ. Невозможность построения сколь угодно надежных схем для источников неймановского типа

Для определения уровня надёжности схемы часто применяется вероятностный подход. Следуя [3, Часть III, Раздел 1], будем считать, что $\mathcal{M} = (\Sigma, \text{И})$ – ненадежная схема Σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, переходящая под действием источника неисправностей И в состояния $\Sigma = \Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(t)}$, в которых реализуются функции $F = F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(t)}$ соответственно, определённые на множестве наборов $\mathcal{N} = \{\beta_1 \ldots, \beta_p\}$. Пусть далее вероятность того, что схема Σ находится в состоянии $\Sigma^{(i)}$, известна и равна π_i, где $i = 1, \ldots, t$, $0 \leq \pi_i \leq 1$ и $\sum_{i=1}^{t} \pi_i = 1$. Введём следующие величины, характеризующие ненадёжность схемы Σ в модели $\mathcal{M}$:

$$\xi(\mathcal{M}) = \sum_{\substack{F^{(j)} \neq F \\ 2 \leq j \leq t}} \pi_j, \tag{1.1}$$

$$\xi(\mathcal{M}, \beta) = \sum_{\substack{F^{(j)}(\beta) \neq F(\beta) \\ 2 \leq j \leq t}} \pi_j, \tag{1.2}$$

где $\beta \in \mathcal{N}$, а затем положим

$$\eta(\mathcal{M}) = \max_{\beta \in \mathcal{N}} \xi(\mathcal{M}, \beta), \tag{1.3}$$

$$q_{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n) = \xi(\mathcal{M}, (x_1, \ldots, x_n)). \tag{1.4}$$

Заметим, что величина $\xi(\mathcal{M})$ ($\xi(\mathcal{M}, \beta)$) задаёт вероятность того, что схема Σ реализует функцию, не равную F (соответственно не равную F на наборе β), и поэтому

$$\eta\mathcal{M} \leq \xi(\mathcal{M}) \leq p\eta(\mathcal{M}), \tag{1.5}$$

откуда следует, в частности, что $\eta(\mathcal{M}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi(\mathcal{M}) = 0$. Схема Σ считается *абсолютно надёжной* в модели $\mathcal{M}$, если $\eta(\mathcal{M}) = 0$ (или $\xi(\mathcal{M}) = 0$). Это означает, что все состояния схемы Σ, имеющие положительную вероятность, эквивалентны Σ. Заметим, что абсолютная надёжная (в модели $\mathcal{M}$) схема - это *самокорректирующаяся* (в модели $\mathcal{M}$) схема.

Функция $q_{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n)$ называется *функцией вероятности неправильного срабатывания схемы* Σ. В дальнейшем, при записи введённых величин вместо пары $\mathcal{M} = (\Sigma, \text{И})$ будем писать просто Σ, если из контекста ясно, какой источник неисправностей имеется в виду.

Таким образом, имеется два способа описания работы ненадёжной схемы Σ: 1) задание вероятностей её переходов в различные возможные неисправные состояния – т.н. *распределение режимов*; 2) задание функции вероятности её неправильного срабатывания на наборах области определенности.

Заметим, что по распределению режимов вида $\begin{bmatrix} f_1; & \ldots; & f_t \\ \pi_1; & \ldots; & \pi_t \end{bmatrix}$ ненадежной схемы $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1)$ функция $q_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ вероятностей её неправлього срабатывания на наборах куба B^n вычисляется следующим образом:

$$q_\Sigma(x_1, \ldots, x_n) = \pi_2(f_1 \oplus f_2) + \ldots + \pi_t(f_1 \oplus f_t). \tag{1.6}$$

С другой стороны, для любой функции $q(x_1, \ldots, x_n)$, которая на наборах куба B^n принимает действительные значения из отрезка $[0, 1]$, и любой ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует такое распределение режимов $\begin{bmatrix} f_1; & \ldots; & f_t \\ \pi_1; & \ldots; & \pi_t \end{bmatrix}$, которое её порождает, и для которого $f_1 = f$. Действительно, пусть $\beta_1, \ldots, \beta_t$ – все те наборы куба B^n, для которых $q(\beta) > 0$ и пусть, для определенности, $q(\beta_1) \leq \cdots \leq q(\beta_t)$. Тогда в качестве искомого распределения режимов можно взять распределение вида $\begin{bmatrix} f_1; & \ldots; & f_t \\ \pi_1; & \ldots; & \pi_t \end{bmatrix}$, где $\pi_1 = 1 - q(\beta_t)$, $\pi_2 = q(\beta_1)$ и $\pi_i = q(\beta_{i-1}) - q(\beta_{i-2})$ при $i = 3, \ldots, t$, а функции $f_1, \ldots, f_t$ определяются из соотношений $f_i = g_i \oplus f_1$ и таблицы 1.

	g_1	g_2	g_3	$\ldots$	g_t
β_1	0	1	0	$\ldots$	0
β_2	0	1	1	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
β_t	0	1	1	$\ldots$	1
остальные наборы	0	0	0	$\ldots$	0

Таблица 1.

Пусть $\mathcal{U}$ – полный класс схем, то есть класс, в котором можно реализовать любую систему ФАЛ, а И – источник неисправностей, действующий на схемы из $\mathcal{U}$. Тогда будем говорить, что $(\mathcal{U}, \text{И})$ – класс ненадёжных схем. Считается, что ФАЛ f допускает сколь угодно надёжную реализацию в классе $\mathcal{U}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует схема Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}$, которая реализует f и для которой $\eta(\Sigma) < \varepsilon$. Из (1.5) следует, что при этом ФАЛ f допускает сколь угодно надёжную реализацию и относительно функционала $\xi(\Sigma)$.

Рассмотрим вероятностный подход на примере ненадёжных СФЭ над базисом Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^b$ где ФЭ $\mathcal{E}_i$ реализует булеву функцию $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$. Пусть для каждого i, $i = 1, \ldots, b$ известно *распределение режимов работы* ФЭ $\mathcal{E}_i$, то есть для каждого j, $j = 1, \ldots, 2^{2^{k_i}}$ известна

и равна $\pi_{i,j}$ вероятность того, что ФЭ $\mathcal{E}_i$ реализует j-ю булеву функцию от булевых переменных $x_1, \ldots, x_{k_i}$ (если считать, что все булевы функции от переменных $x_1, \ldots, x_{k_i}$ упорядочены в соответствии с номерами их столбцов значений). При нахождении ненадёжности схемы Σ над базисом Б будем считать, что все её ФЭ переходят в свои состояния независимо друг от друга, и что любое состояние СФЭ Σ определяется состояниями ФЭ Σ. В соответствии с этим на основе введённых выше соотношений (1.1)–(1.4) можно найти значения ненадёжности $\xi(\Sigma)$ и $\eta(\Sigma)$ для СФЭ Σ, а также распределение режимов её работы и функцию $q_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$.

Таким образом, оба способа описания ненадёжности СФЭ обладают свойством полноты, то есть, зная соответствующее описание для элементов базиса. Его можно определить и для любой СФЭ в данном базисе. При этом пространство событий (состояний) схемы Σ будет состоять из наборов всевозможных режимов её элементов и всевозможных наборов значений в её вершинах, при первом и втором способах описания соответственно.

Будем говорить, что источник неисправностей И для класса $\mathcal{U}_{\text{Б}}^C$ является[1] источником *неймановского* типа, если $\pi_{i,j} > 0$ для каждого $i = 1, \ldots, b$ и каждого $j = 1, \ldots, 2^{k_i}$.

Для базиса Б из ненадёжных функциональных элементов введем величины

$$\widehat{\xi}_{\text{Б}} = \min_{1 \le i \le b} \min_{1 \le j \le 2^{2^{k_i}}} \pi_{ij}, \ \widehat{\eta}_{\text{Б}} = \min_{1 \le i \le b} \min_{\beta \in B^{k_i}} \min\{\xi(\mathcal{E}_i, \beta), 1 - \xi(\mathcal{E}_i, \beta)\}, \tag{1.7}$$

где величина $\xi(\mathcal{E}_i, \beta)$ определяется в соответствии с (1.2). Заметим, что $\widehat{\xi}_{\text{Б}} > 0$ и $\widehat{\eta}_{\text{Б}} > 0$, если Б - базис неймановского типа.

Теорема 1.1 (Теорема Неймана)**.** *Для любой СФЭ Σ в базисе Б из ненадёжных функциональных элементов, единственный выход которой является выходом элемента, выполняются неравенства*

$$\xi(\Sigma) \ge \widehat{\xi}_{Б}, \qquad \eta(\Sigma) \ge \widehat{\eta}_{Б}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Пусть $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1)$ и пусть единственный выход z_1 СФЭ Σ является выходом ее элемента $\mathcal{E}_i$, входы которого присоединены к вершинам $v_1, \ldots, v_{k_i}$, являющимся либо входами Σ, либо выходами элементов, связанными с "внутренними" БП $u_1, \ldots, u_{k_i}$.

Для наборов α, $\alpha \in B^n$ и γ, $\gamma \in B^{k_i}$, обозначим через $p(\alpha, \gamma)$ вероятность того, что при $x = (x_1, \ldots, x_n) = \alpha$ набор БП $u = (u_1, \ldots, u_{k_i})$ принимает значения γ. Из (1.7) следует, что при $u = \gamma$ вероятность $q(\gamma, \alpha)$ появления на выходе $\mathcal{E}_i$ значения $\bar{f}(\alpha)$ не меньше, чем $\widehat{\eta}_{\text{Б}}$. Это означает, что вероятность появления при $x = \alpha$ значения $\bar{f}(\alpha)$ на выходе z_1, которая, очевидно, равна

$$\Sigma_{\gamma \in B^{k_i}} p(\alpha, \gamma) \cdot q(\gamma, \alpha)$$

и, тем самым, не меньше, чем $\widehat{\eta}_{\text{Б}}$

Первое неравенство (1.8) доказывается аналогично.

Теорема доказана. □

[1]Предполагается, что И задает распределение режимов элементов базиса Б, которое, в дальнейшем, будем считать атрибутом этих ненадёжных элементов.

Следствие. Для любой отличной от БП ФАЛ f в классе $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{C}$, где Б - базис неймановского типа, невозможна сколь угодно надёжная реализация ФАЛ, отличных от входных БП.

§2 Эффект нарастания ненадежности. Построение сколь угодно надёжных СФЭ в базисе из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования

Ненадежность СФЭ в базисах из ненадёжных функциональных элементов характеризуются рядом интересных и, иногда, неожиданных эффектов. Одним из них является т.н. эффект нарастающей ненадёжности.

Рассмотрим его на примере двух (неполных) базисов: $\text{Б}_{\oplus} = \mathcal{E}_{\oplus}$ и $\text{Б}_{\&} = \mathcal{E}_{\&}$, где элементы $\mathcal{E}_{\&}$ и $\mathcal{E}_{\oplus}$ характеризуются следующим распределением режимов:

$$\mathcal{E}_{\&} : \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_2; & 0 \\ 1-p; & p \end{bmatrix} \text{ и } \mathcal{E}_{\oplus} : \begin{bmatrix} x_1 \oplus x_2; & \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \\ 1-p; & p \end{bmatrix}, 0 < p < 1.$$

Исследуем сначала СФЭ $\Sigma_{\&}^{(n)}$ в базисе $\text{Б}_{\&}$, которая имеет входы $x_1, \ldots, x_n$, выход z_1 и представляет собой цепочку из $(n-1)$ последовательно соединенных элементов $\mathcal{E}_{\&}$ (см. Рис. 2.1).

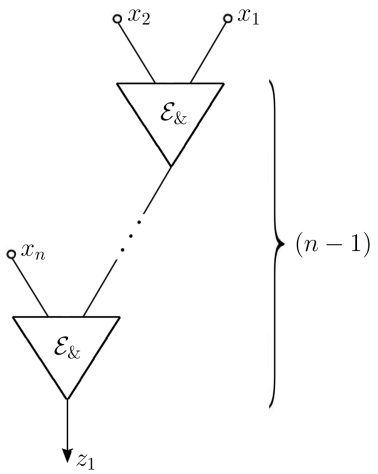

Рис. 2.1

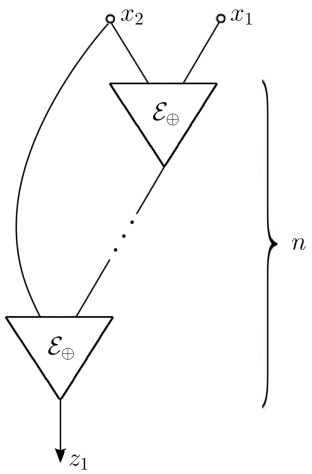

Рис. 2.2

Заметим, что $\Sigma_{\&}^{(n)}$ реализует ФАЛ $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, если все её элементы работают правильно, и ФАЛ 0 в остальных случаях. Следовательно,

$$\xi(\Sigma_{\&}^{(n)}) = \eta(\Sigma_{\&}^{(n)}) = \eta(\Sigma_{\&}^{(n)}, (1, \ldots, 1)) = (1-p)^{n-1}$$

и, тем самым, ненадёжность $\Sigma_{\&}^{(n)}$ (в любом смысле) стремится к 1 при n, стремящемся к ∞.

Рассмотрим далее, СФЭ $\Sigma_{\oplus}^{(n)}$ в базисе Б$_{\oplus}$, которая имеет входы x_1, x_2 и представляет собой цепочку из n последовательно соединенных по вторым входам элементов $\mathcal{E}_{\oplus}$, первые входы которых присоединены к входу x_2 (см. Рис. 2.2).

Пусть n - нечетное число. Заметим, что в данном случае СФЭ $\Sigma_{\oplus}^{(n)}$ реализует ФАЛ $x_1 \oplus x_2$ как в исправном состоянии, так и в любом из неисправных состояний, если при этом $x_2 = 1$, так как $x_1 \oplus 1 = \bar{x}_1 \vee \bar{1} = \bar{x}_1$. Легко видеть также, что, если $x_2 = 0$ и хотя бы один элемент схемы сработал неправильно, на её выходе появится 1. Таким образом, СФЭ $\Sigma_{\oplus}^{(n)}$ реализует ФАЛ $x_1 \oplus x_2$ в исправном состоянии и ФАЛ $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ в любом из неисправных состояний, т.е.

$$\xi(\Sigma_{\oplus}^{(n)}) = (1-p)^n = \eta(\Sigma_{\oplus}^{(n)}) = \eta(\Sigma_{\oplus}^{(n)}, (0,0)),$$

и, тем самым, ненадёжность $\Sigma_{\oplus}^{(n)}$ (в любом смысле) стремится к 1 при n, стремящемся к ∞.

Перейдем к вопросу о возможности построения сколь угодно надёжных СФЭ для произвольных ФАЛ. Докажем, что такое построение возможно, если в базисе Б имеется абсолютно надёжный ФЭ $\mathcal{E}_i$, реализующий функцию голосования $H(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Действительно, если СФЭ Σ реализует ФАЛ f и $\eta(\Sigma) = \varepsilon$, то для надежности СФЭ $\Sigma^{(1)}$, показанной на Рис. 2.3.a, которая тоже реализует f, имеет место равенство

$$\eta(\Sigma^{(1)}) = \theta(\varepsilon) = 3\epsilon^2 - 2\epsilon^3$$

(график функции $\tau = \theta(\varepsilon)$ показан на Рис. 2.3.b).

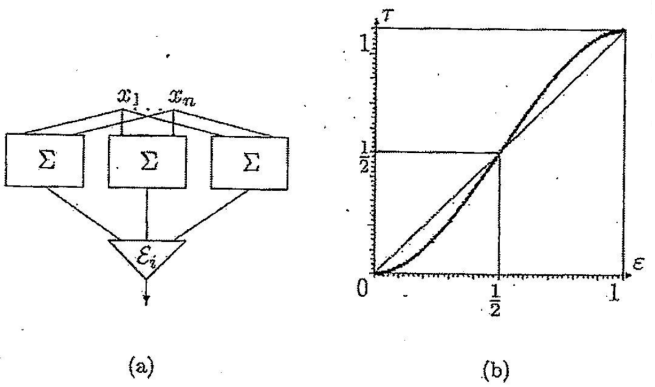

Рис. 2.3

Заметим, что $\theta(0) = 0$, $\theta(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, что первые две производные функции $\theta(\varepsilon)$ на отрезке $[0; \frac{1}{2}]$ неотрицательны, причём $\theta''(0) = \theta''(\frac{1}{2}) = 0$ и $\theta'(\frac{1}{2}) > 0$, $\theta'(0) > 0$, и что $\theta(\varepsilon) < \varepsilon$, если $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Поэтому, рекурсивно применяя указанную процедуру повышения надёжности к СФЭ $\Sigma^{(k)}$, результатом которой является СФЭ $\Sigma^{(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, построим последовательность СФЭ $\Sigma^1, \Sigma^2, \ldots, \Sigma^k, \ldots$, реализующих f, для которой

$$\eta(\Sigma^{(k)}) \leq \theta(\eta(\Sigma^{(k-1)})) \leq \theta_k(\eta(\Sigma)) \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

где $\theta_0(\varepsilon) = \varepsilon$, $\theta_k(\varepsilon) = \theta(\theta_{k-1}(\varepsilon))$. Заметим, что при этом

$$\theta_k(\varepsilon) \leq \frac{1}{3}(3\varepsilon)^{2^k}, \tag{2.1}$$

если $\varepsilon < \frac{1}{6}$. Заметим также, что СФЭ $\Sigma^{(k)}$ содержит 3^k подсхем вида Σ и $1+3+\dots+3^{k-1} = \frac{3^k-1}{2}$ ФЭ $\mathcal{E}_i$, то есть

$$\mathcal{L}(\Sigma^{(k)}) \le 3^k \mathcal{L}(\Sigma) + \frac{3^k}{2}\mathcal{L}(\mathcal{E}_i) \tag{2.2}$$

Аналогичные построения и оценки применимы и для повышения ξ-ненадёжности СФЭ.

Пусть базис Б допускает построение сколь угодно надёжных СФЭ для любой ФАЛ. Определим в этой случае для произвольной ФАЛ f и любого ε, $0 \le \varepsilon < 1$, функционал сложности $\mathcal{L}^C_{\text{Б}}(f,\varepsilon)$, равный минимальной из сложностей тех СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathfrak{U}^C_{\text{Б}}$, которые реализуют ФАЛ f и для которых $\eta(\varepsilon) \le \epsilon$. Затем введём соответствующую функцию Шеннона

$$\mathcal{L}^C_{\text{Б}}(n,\varepsilon) = \max_{f\in P_2(n)} \mathcal{L}^C_{\text{Б}}(f,\varepsilon),$$

для которой (см. (3.19) в теореме 3.2 §3 главы 1) будет справедлива нижняя мощностная оценка

$$\mathcal{L}^C_{\text{Б}}(n,\varepsilon) \gtrsim \rho_{\text{Б}}\frac{2^n}{n}, \tag{2.3}$$

где $\rho_{\text{Б}}$ - приведённый вес базиса Б. Заметим, что в соответствии с высказанными ранее соображениями для любого действительного δ, $0 \le \delta < \frac{1}{2}$, указанным свойством полноты обладает базис $\widehat{\text{Б}}_\delta$, состоящий из ФЭ $\mathcal{E}_\&, \mathcal{E}_\vee, \mathcal{E}_\neg$ и $\mathcal{E}_H$ веса 1 с базисными ФАЛ $x_1\cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$, $\bar{x}_1$ и $H(x_1,x_2,x_3)$, для которых $\eta(\mathcal{E}_\&) = \eta(\mathcal{E}_\vee) = \eta(\mathcal{E}_\neg) = \delta$ и $\eta(\mathcal{E}_H) = 0$. Следовательно, в силу (2.3)

$$\mathcal{L}^C_{\widehat{\text{Б}}_\delta}(n,\varepsilon) \gtrsim \frac{1}{2}\cdot\frac{2^n}{n}, \tag{2.4}$$

так как $\rho_{\widehat{\text{Б}}_\delta} = \frac{1}{2}$.

Теорема 2.1. *Для любого δ, $0 \le \delta < \frac{1}{2}$ и $n = 1,2,\dots$ существует стремящаяся к нулю неотрицательная последовательность $\varepsilon = \varepsilon(n)$ такая, что*

$$\mathcal{L}^C_{\widehat{B}_\delta}(n,\varepsilon(n)) \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{2^n}{n},$$

Доказательство. Требуемая нижняя асимптотическая оценка теоремы вытекает из (2.4).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки теоремы возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ $\tilde{\Sigma}_f$, сложность которой асимптотически не больше, чем $\frac{1}{2}\cdot\frac{2^n}{n}$, а η-ненадёжность не превосходит $\varepsilon(n)$.

Для этого в соответствии с асимптотически наилучшим методом синтеза СФЭ в произвольном базисе Б (см. глава 1, §5, теорема 5.1) выберем для базиса Б $= \widehat{\text{Б}}_\delta$ натуральные параметры m, t и r такие, что (см. (5.3), (5.4) из §5 главы 1)

$$s \le 2^m, p = 2t+1, \frac{2^m}{s} \le p \le \frac{2^m}{s} + 2, m < n, \tag{2.5}$$

а в качестве элемента $\mathcal{E}_j$ будем использовать элемент $\mathcal{E}_H$.

Построим по теореме 5.1 главы 1 СФЭ Σ_f, реализующую ФАЛ f, так, чтобы в соответствии с неравенством (5.9) главы 1 число элементов $\mathcal{E}_H$ в Σ_f, то есть $\mathcal{L}_{\mathcal{E}_H}(\Sigma_f)$, и число элементов базиса Б_0 в Σ_f, то есть $\mathcal{L}_{\text{Б}_0}(\Sigma_f)$, удовлетворяли неравенствам

$$L_H(\Sigma_f) \le t\cdot 2^{n-m} \le \frac{1}{2}(\frac{2^m}{s}+1)\cdot 2^{n-m} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{2^m}{s} + 2^{n-m-1}, \tag{2.6}$$

$$L_{Б_0}(\Sigma_f) \leq O(2^{n-m} + (\frac{2^m}{s} + 1)(2^{m+s/2} + 2^s)) \tag{2.7}$$

Будем теперь повышать надёжность СФЭ Σ_f с помощью абсолютно надёжного ФЭ $\mathcal{E}_H$ и тех приёмов, которые описаны в начале параграфа. Найдём, сначала, натуральное $\hat{l}$, для которого $\theta_{\hat{l}}(p) = \hat{\delta} < \frac{1}{6}$, и построим СФЭ Σ_f заменой каждого ФЭ $\mathcal{E}_\varphi$, $\varphi \in Б_0$, в СФЭ Σ_f схемой (макроэлементом) $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi = \mathcal{E}_\varphi^{(\hat{l})}$. Пусть, далее, l - натуральный параметр, а СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ получается из СФЭ $\widehat{\Sigma}_f$ заменой каждого её макроэлемента $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi$, $\varphi \in Б_0$, схемой $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi^{(l)}$.

Схема $\widetilde{\Sigma}_f$ реализует, очевидно, ФАЛ f, а из неравенств (2.6), (2.7) и $\delta \hat{<} \frac{1}{6}$ с учётом привёденных в начале параграфа соотношений, касающихся повышения надёжности, следует, что

$$\mathcal{L}(\widetilde{\Sigma}_f) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{s} + O(3^l(2^{n-m} + \frac{2^{s+2m}}{s})), \tag{2.8}$$

$$\eta(\widetilde{\Sigma}_f) = O(3^l(2^{n-m} + \frac{2^{s+2m}}{s}) \cdot 2^{-2^l}). \tag{2.9}$$

Из полученных оценок следует, что при достаточно больших значениях n и

$$l = \lceil \log n \rceil, m = 2l + \lceil 2 \log n \rceil, s = \lceil n - 3m - l \cdot \log 3 \rceil \tag{2.10}$$

условия (2.5) будут выполнены, а построенная СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ в силу (2.8), (2.9) будет удовлетворять требуемым соотношениям

$$\mathcal{L}(\widetilde{\Sigma}_f) \lesssim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}, \quad \eta(\widetilde{\Sigma}_f) = o(1).$$

Теорема доказана. □

§3 Самокорректирующиеся СФЭ в базисах из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования, асимптотически наилучшие методы их синтеза

Пусть базис $Б = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^b$, где ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, имеет вес $\mathcal{L}_i$ и реализует ФАЛ $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$ с η-ненадёжностью η_i, $0 \leqslant \eta_i < \frac{1}{2}$. При этом ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i \in [1, b]$, в соответствии с §9 считается (абсолютно) надежным, если $\eta_i = 0$ и *ненадёжным* в противном случае. Предполагается, что ненадёжный ФЭ $\mathcal{E}_i$ при выходе из строя может переходить в любое из $2^{2^{k_i}}$ неисправных состояний, в которых реализуется все различные ФАЛ от его входных БП.

Следуя [3, Часть III, Раздел 2], будем говорить, что СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_Б^C$, *корректирует* d *ошибок*, если она не изменяет своё функционирование при выходе из строя любых не более, чем d, ненадёжных элементов. Заметим, что если в базисе Б возможна (см. §2) сколь угодно надёжная реализация произвольной ФАЛ, то для любого натурального d и любой ФАЛ в нём возможно построение СФЭ, которая реализует эту ФАЛ и корректирует d ошибок.

В указанном случае для произвольной ФАЛ f и натурального d определим функционал сложности $\mathcal{L}_Б^C(f, d)$, равный минимальной сложности тех СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_Б^C$, которые реализуют ФАЛ f и корректируют d ошибок. Затем введём соответствующую функцию Шеннона

$$\mathcal{L}_Б^C(n, d) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_Б^C(f, d),$$

для которой согласно неравенству (3.19) главы 1 будет справедлива нижняя мощностная оценка

$$\mathcal{L}^C_{\text{Б}}(n,d) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}. \tag{3.1}$$

Будем рассматривать далее базис $\widehat{\text{Б}}$, состоящий из ФЭ $\mathcal{E}_{\&}$, $\mathcal{E}_{\vee}$, $\mathcal{E}_{\neg}$ и $\mathcal{E}_H$ веса 1, из которых абсолютно надёжным является только ФЭ $\mathcal{E}_H$, а также базис $\check{\text{Б}}$, который отличается от $\widehat{\text{Б}}$ лишь тем, что "вес" $\mathcal{L}_H$ ФЭ $\mathcal{E}_H$ в нём больше двух. Поскольку в каждом из базисов возможна сколь угодно надёжная реализация произвольной ФАЛ (см. §2), то для них определены введённые выше фукнционалы сложности и функции Шеннона, которые в силу (3.1) удовлетворяют асимптотическим оценкам

$$\mathcal{L}^C_{\widehat{\text{Б}}}(n,d) \gtrsim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}, \qquad \mathcal{L}^C_{\check{\text{Б}}}(n,d) \gtrsim \frac{2^n}{n}, \tag{3.2}$$

так как $\rho_{\widehat{\text{Б}}} = \rho_{\check{\text{Б}}} = 1$.

Для построения самокорректирующихся СФЭ в базисах $\widehat{\text{Б}}$, $\check{\text{Б}}$ воспользуемся конструкциями §2. Так, индукцией по $l = 1, 2, \ldots$ легко показать, что СФЭ $\Sigma^{(l)}$, построенная в §2 по СФЭ Σ, корректирует $(2^l - 1)$ ошибок.

Теорема 3.1. *Для $n = 1, 2, \ldots$ и любой натуральной последовательности $d = d(n)$, такой что $\log d(n) = o(n)$, справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{L}^C_{\widehat{\text{Б}_0}}(n, d(n)) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Требуемая нижняя асимптотическая оценка функции Шеннона $\mathcal{L}^C_{\widehat{\text{Б}_0}}(n,d)$ вытекает из (3.2).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки функции Шеннона возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ $\widetilde{\Sigma_f}$, которая корректирует d ошибок и имеет сложность асимптотически не превосходящую $\frac{2^{n-1}}{n}$.

Покажем, что в качестве искомой СФЭ можно взять СФЭ $\widetilde{\Sigma_f}$, построенную при доказательстве теоремы 2.1, если считать, что $\widehat{l} = 0$ и $l = \lceil \log(d+1) \rceil$, а остальные параметры конструкции выбраны согласно (2.10). Действительно, полученная таким образом СФЭ $\widetilde{\Sigma_f}$ состоит из абсолютно надёжных ФЭ $\mathcal{E}_H$ и макроэлементов вида $\mathcal{E}^{(l)}_{\varphi}$, $\varphi \in \text{Б}_0$, каждый из которых корректирует $2^l - 1 \geqslant d$ ошибок. При этом сложность СФЭ $\widetilde{\Sigma_f}$ в силу (2.8) будет асимптотически не больше, чем $\frac{2^{n-1}}{n}$.

Теорема доказана. $\square$

Напомним, что (см., например, [4]) *шаром* радиуса r с центром в точке $\alpha \in B^n$ называется множество всех наборов длины n, расстояние от которых до α не превосходит r. Обозначим через $S_r(n)$ число точек (наборов длины n) в шаре радиуса r. Точки шара радиуса r - это его центр, множество наборов, отличающихсяот центра в одной координате, - их C^1_n, множество наборов, отличающихся от центра в двух координатах, - их C^2_n, и т.д. Следовательно,

$$S_r(n) = C^0_n + \cdots + C^r_n.$$

Определим функцию $M_r(n)$ как максимальное число попарно не пересекающихся шаров радиуса r, укладывающихся в B^n. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Для любых натуральных n и r, где $r \leq n$, справедливо неравенство*

$$M_r(n) \leqslant 2^n / S_{2r}(n).$$

Доказательство. Будем последовательно размещать непересекающиеся шары радиуса r в кубе B^n. Выберем в качестве центра первого шара произвольный набор α_1 куба B^n. Для выбора набора α_2 в качестве центра второго шара нельзя использовать точки, находящиеся от α_1 на расстоянии меньше, чем $2r+1$, так как иначе первый и второй шары будут пересекаться. Пусть уже выбраны наборы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, тогда для выбора α_{k+1} число "запрещенных" точек не больше, чем $k \cdot S_{2r}(n)$, то есть, если $k \cdot S_{2r}(n) < 2^n$, то можно выбрать α_{k+1}. Пусть таким образом выбрано m наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, а выбор набора α_{m+1} в качестве центра очередного шара невозможен. Это означает, что $m \cdot S_{2r}(n) \geq 2^n$, то есть

$$M_r(n) \geq m \geq \frac{2^n}{S_{2r}(n)}.$$

Лемма доказана. □

Теорема 3.2. *Для $n = 1, 2, \ldots$ и любой натуральной последовательности $d = d(n)$, такой что $d(n) = o(n/\log n)$, справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{L}^C_{\tilde{Б}_0}(n, d(n)) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Требуемая нижняя асимптотическая оценка функции Шеннона $\mathcal{L}^C_{\tilde{Б}_0}(n, d)$ вытекает из (3.2).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки данной функции Шеннона возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ Σ_f, которая корректирует d ошибок и имеет сложность, асимптотически не превосходящую $\frac{2^{n-1}}{n}$.

Выберем натуральные параматеры m, N и R такие, что

$$m < n, N = 2^m, R = N + 2d \cdot (m+1) \leq 2^{m+1}, \tag{3.3}$$

для которых, очевидно,

$$2^N = 2^N \cdot \frac{2^{2d(m+1)}}{2^{m+1 2d}} \leq \frac{2^R}{R^{2d}} \leq \frac{2^R}{C_R^0 + \cdots + C_R^{2d}},$$

то есть с учётом леммы 3.1

$$2^N \leq M_d(R). \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что существует такое инъективное отображение ψ, которое переводит наборы куба B^N в центры непересекающихся шаров радиуса d куба B^R. На его основе определим отображение ψ^{-1}, переводящее произвольный набор β, $\beta \in B^R$, в такой набор α, $\alpha \in B^N$, для которого набор $\psi(\alpha)$ является ближайшим к β центром одного из указанных шаров. Заметим, что при этом $\psi^{-1}(\gamma) = \alpha$ для любого набора γ, принадлежащего шару с центром $\psi(\alpha)$.

Положим, как обычно, $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ и представим ФАЛ f в виде

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'=(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)} K_{\sigma'}(x') \cdot f_{\sigma'}(x''), \tag{3.5}$$

где $K_{\sigma'}(x') = x_1^{\sigma_1} \cdot \cdots \cdot x_m^{\sigma_m}$ и $f_{\sigma'}(x'') = f(\sigma', x'')$.

Полагая, что

$$m = m(n) = o(n) \text{ и } d \leq 2^l - 1, \tag{3.6}$$

где l - некоторый параметр, построим СФЭ Σ_f из следующих подсхем:
1) подсхемы Σ'' над базисом Б$_0$, которая реализует систему ФАЛ $F'' = \psi(f_{\tilde{0}}(x''), \ldots, f_{\tilde{1}}(x''))$ из $P_2^R(x'')$, получена асимптотически наилучшим методом (см., например, теорему 5.1 и неравенство (5.1) главы 1) и для которой

$$\mathcal{L}(\Sigma'') \lesssim R\frac{2^{n-m}}{n}; \tag{3.7}$$

2) подсхемы Σ_ψ над базисом Б$_0^{(l)}$ из макроэлементов $\mathcal{E}_{\&}^{(l)}$, $\mathcal{E}_{\vee}^{(l)}$, $\mathcal{E}_{\neg}^{(l)}$, которая реализует систему ФАЛ $\psi^{-1}(y_1, \ldots, y_R)$, получена методом Шеннона [1] и имеет сложность

$$\mathcal{L}(\Sigma_\psi) = O(2^m \cdot \frac{2^R}{R} \cdot 3^l), \tag{3.8}$$

а её входы просоединены в СФЭ Σ_f к выходам подсхемы Σ'' с теми же номерами;
3) подсхемы Σ', представляющей собой мультиплексорную СФЭ порядка m и сложности

$$\mathcal{L}(\Sigma') = O(3^l \cdot 2^m) \tag{3.9}$$

над базисом Б$_0^{(l)}$, адресными входами которой являются БП x', а информационные входы $(u_0, \ldots, u_{2^m-1})$ присоединены к выходам подсхемы Σ_ψ с номерами $1, \ldots, 2^m$ соответственно.

Из построения СФЭ Σ_f и отмеченных выше свойств отображений ψ, ψ^{-1} следует, что она реализует ФАЛ f, корректирует, с учетом (3.6), d ошибок, а её сложность в силу (3.7)–(3.9) удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \lesssim R \cdot \frac{2^{n-m}}{n} + O(3^l \cdot 2^m \cdot \frac{2^R}{R}).$$

Из полученной оценки следует, что при достаточно больших значениях n и

$$m = \lfloor \log n \rfloor - 1, \quad l = \lceil \log d + 1 \rceil$$

условия (3.3) и (3.6) будут выполнены, а построенная СФЭ Σ_f будет удовлетворять всем требованиям теоремы.

Теорема доказана. □

§4 Сферические функции. Сложность линейной и других функций в классе контактных схем и самокорректирующихся контактных схем

Функцию f из $P_2(n)$ будем называть *α–сферической*, где $\alpha \in B^n$, если для любых наборов β и γ из B^n, отличающихся от α ровно в одном и ровно в двух разрядах соответственно,

$f(\beta) = 0$ и $f(\gamma) = 1$. При этом $\tilde{0}$–сферическую ФАЛ, будем называть просто сферической. Пусть s_n^i, где $0 \leqslant i \leqslant n$, — элементарная симметрическая ФАЛ с рабочим числом i, то есть ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$, обращающаяся в 1 на всех тех наборах, которые содержат ровно i единиц. Заметим, что ФАЛ s_3^2 является сферической, а ФАЛ s_3^1 — $\tilde{1}$–сферической и что ФАЛ $\bar{l}_n$ (l_n) является α–сферической для всех наборов α из множества $B^n_{\text{чёт.}}$ ($B^n_{\text{неч.}}$), содержащего все наборы B^n с чётным (соответственно нечётным) числом единиц.

Наряду с КС из «обычных» (абсолютно надёжных) контактов будем рассматривать КС из ненадёжных контактов, которые могут выходить из строя в результате *обрыва*, когда ФАЛ проводимости контакта становится равной 0 или *замыкания*, когда эта ФАЛ становится равной 1. Будем говорить, что КС Σ *корректирует* p, $p \geqslant 0$, *обрывов и* q, $q \geqslant 0$, *замыканий, если она эквивалентна любой КС, получающейся из* Σ *в результате обрыва не более чем* p, *и замыкания не более чем* q *контактов.*

Лемма 4.1. *Если КС* Σ *реализует сферическую ФАЛ* f *из* $P_2(n)$, *то в* Σ *встречаются замыкающие контакты всех БП* $x_1, \ldots, x_n$, *причём контакты всех этих типов, за исключением, быть может, двух, встречаются в ней не менее двух раз.*

Доказательство. Из сферичности ФАЛ f следует, что она существенно зависит от всех своих БП и не является антимонотонной ни по одной из них. Следовательно, в Σ имеются замыкающие контакты всех БП $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим через a_1 и a_2 полюса КС Σ, а через E_1 (E_2) — множество тех её контактов, каждый из которых является первым (соответственно последним) замыкающим контактом для какой-либо проводящей цепи КС Σ идущей от a_1 к a_2.

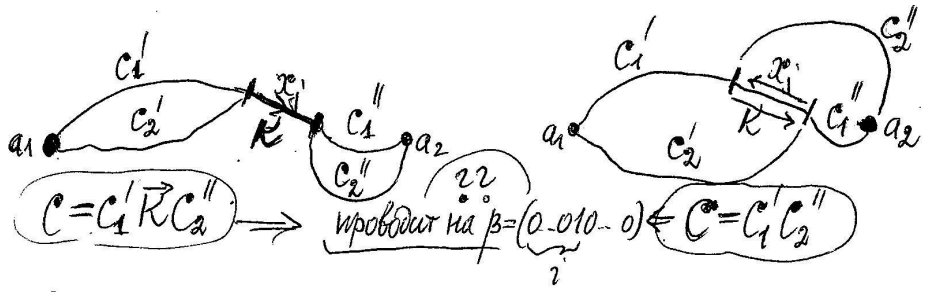

Рис. 4.1

Докажем, сначала, что $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Действительно, пусть $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ и поэтому в КС Σ имеется контакт K вида x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, который является первым (последним) замыкающим контактом проводящей цепи C_1 (соответственно C_2), идущей от a_1 к a_2. Для $j = 1, 2$ обозначим через C_j' и C_j'' начальную (до контакта K) и заключительную (после контакта K) подцепи цепи C_j. Пусть, далее, цепь C состоит из начальной подцепи C_1', контакта K и заключительной подцепи C_2'', если цепи C_1 и C_2 проходят контакт K в одном направлении и состоит из начальной подцепи C_1', которая сразу переходит в заключительную подцепь C_2'' в противном случае. Заметим, что подцепи C_1' и C_2'' по построению состоят только из размыкающих контактов, среди которых нет контактов вида $\overline{x}_i$ и поэтому цепь C будет

проводить на наборе

$$\beta = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, 1, 0, \ldots, 0),$$

что противоречит сферичности ФАЛ f.

Докажем теперь, что каждое из множеств E_s, $s = 1, 2$, содержит замыкающие контакты всех БП $x_1, \ldots, x_n$ за исключением, быть может, одной. Действительно, из сферичности ФАЛ f следует, что для любых i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, в КС Σ имеется цепь C, идущая из a_1 в a_2, которая проводит на наборе

$$\gamma = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots 0, \underbrace{1, 0, \ldots, 0}_{n-j+1})$$

и состоит из замыкающих контактов БП x_i, x_j, а также размыкающих контактов остальных БП. Заметим, что в C не могут отсутствовать замыкающие контакты ни одной из БП x_i, x_j, так как иначе ФАЛ f обращалась бы в 1 на некотором наборе β, содержащем ровно одну 1. Следовательно, первый из контактов вида x_i, x_j на цепи C войдёт в E_1, а последний — в E_2 и поэтому как в E_1, так и в E_2 контакты вида x_i, x_j не могут отсутствовать одновременно. Таким образом, во множестве $E_1 \cup E_2$ не могут отсутствовать замыкающие контакты трёх и более БП.

Лемма доказана. □

Следствие 1. *Если КС Σ реализует α–сферическую ФАЛ f из $P_2(n)$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то контакты всех типов $x_1^{\overline{\alpha}_1}, \ldots, x_n^{\overline{\alpha}_n}$ встречаются в Σ по крайней мере $t = 1$ раз, причём контакты всех этих типов за исключением, быть может, двух встречаются в Σ не менее $r = 2$ раз.*

Следствие 2. *Если КС Σ корректирует p, $p \geqslant 0$ обрывов, то в условиях следствия 1 имеем $t \geqslant p + 1$ и $r \geqslant 2\lceil (p+1)/2 \rceil$, то есть*

$$L(\Sigma) \geqslant 2(p+1) + 2\left\lceil \frac{p+1}{2} \right\rceil (n-2).$$

Рассмотрим, для определенности, случай $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Если при этом контакт x_i встречается в Σ не более p раз, то, оборвав все эти контакты, мы получим КС, реализующую ФАЛ, которая зависит от x_i либо фиктивно, либо инмонотонно и, следовательно, не является сферической ФАЛ.

Пусть, далее, в Σ имеются три БП, например, x_1, x_2, x_3, замыкающие контакты которых встручаются в Σ меньше, чем $r = 2\lceil (p+1)/2 \rceil$ раз, но не меньше, чем $t = (p+1)$ раз. Это возможно только в том случае, когда p — четное число и, следовательно, $r = (p+2)$, а контакты вида x_i, $i = 1, 2, 3$ встречаются в Σ $(p+1)$ раз. В этом случае хотя бы в одном из множеств K_1, K_2 окажется не больше, чем $(p/2)$, замыкающих контактов по крайней мере двух из БП x_1, x_2, x_3. Тогда, обрывая эти не более, чем p, контактов, мы устраним из этого множества 2 БП.

Будем называть множество δ, $\delta \subseteq B^n$, *равномерным*, если для каждого i, $i \in [1, n]$, число тех наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из δ, у которых $\alpha_i = 1$, равно $\frac{|\delta|}{2}$. Заметим, что каждый контакт

КС $\Sigma = \Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ проводит (не проводит) ровно на половине всех наборов равномерного множества δ, $\delta \subseteq B^n$, и, следовательно, в обозначениях §§1, 5 [1, глава 2] выполняются равенства

$$\frac{1}{|\delta|}\sum_{\alpha\in\delta}|E(\Sigma|_\alpha)| = \frac{1}{|\delta|}\sum_{\alpha\in\delta}|E(\Sigma|_{\overline{\alpha}})| = \frac{1}{2}L(\Sigma) \tag{4.1}$$

которые и задают «среднюю» проводимость (непроводимость) контактов Σ на наборах множества δ. В качестве множества δ мы, чаще всего, будем выбирать весь единичный куб B^n, а также некоторые его подмножества и, в частности, $B^n_{\text{чет.}}$, $B^n_{\text{неч.}}$.

Теорема 4.1. *При любом натуральном n имеют место равенства*

$$L^{\text{К}}(s_n^1) = L^{\text{К}}(s_n^{n-1}) = 3n - 2,$$

а если $n \geqslant 2$, то

$$L^{\text{К}}(l_n) = L^{\text{К}}(\bar{l}_n) = 4n - 4. \tag{4.2}$$

Доказательство. Все необходимые верхние оценки могут быть получены с помощью метода каскадов (см., например, § 3 из [1, гл. 4]).

Пусть КС Σ реализует ФАЛ $f = s_n^{n-1}$. Из того, что ФАЛ s_n^{n-1} не является ни монотонной ни антимонотонной ни по одной из своих БП, следует что в КС Σ встречаются константы всех типов $x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$. Заметим, что при этом контакты всех типов $x_1, \ldots, x_n$ за исключением, быть может, двух встречаются в Σ не менее двух раз. Действительно, пусть, например, контакты типов x_1, x_2, x_3 встречаются в Σ только по одному разу. Тогда, подставив константу 1 вместо всех БП $x_4, \ldots, x_n$, мы получим КС Σ', которая реализует сферическую ФАЛ s_3^2 и содержит только по одному замыкающему контакту своих БП, что противоречит лемме 4.1. Следовательно,

$$L(\Sigma) \geqslant 3n - 2.$$

Случай, когда КС Σ реализует ФАЛ $f = s_n^1$, сводится к рассмотренному случаю инвертированием БП.

Пусть теперь $n \geqslant 2$ и КС Σ реализует ФАЛ $f = l_n$. Из того, что ФАЛ f является α–сферической при любом α из $B^n_{\text{неч.}}$, в силу (4.1) и следствия 1 из леммы 4.1 вытекает неравенство:

$$2^{n-2}L(\Sigma) \geqslant 2^{n-1}(2n-2),$$

из которого следует, что

$$L(\Sigma) \geqslant 4n - 4.$$

Случай, когда $f = \bar{l}_n$, рассматривается аналогично.

Теорема доказана. □

Для ФАЛ f и $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ определим «самокорректирующуюся» сложность $L^{\text{К}}_{(p,q)}(f)$ как минимальную из сложностей тех КС, реализующих ФАЛ f, которые корректируют p обрывов и q замыканий.

Теорема 4.2. *При любоых натуральных p и n, $n \geqslant 2$, имеют место равенства*

$$L^{\text{К}}_{(p,0)}(l_n) = 4(p+1) + 4\left\lceil \frac{p+1}{2} \right\rceil (n-2), \tag{4.3}$$

$$L^{\text{К}}_{(1,1)}(l_n) = 8n. \tag{4.4}$$

Доказательство. Нижняя оценка в (4.3) доказывается аналогично нижней оценке (4.2) с использованием следствия 2 леммы 4.1. Верхнюю оценку (4.3) в случае $p = 1$ даёт схема из [**?**, гл. 3, § 1], которая получается из КС, построенной для линейной ФАЛ по методу каскадов, добавлением 4 контактов. В общем случае $p \geqslant 1$ искомая КС представляет собой результат параллельного соединения $\lceil (p+1)/2 \rceil$ указанных выше самокорректирующихся КС и $((p+1) - 2\lfloor (p+1)/2 \rfloor)$ КС, построенных по методу каскадов.

Верхнюю оценку в (4.4) даёт КС, которая получается в результате последовательного соединения двух упомянутых выше КС для линейной ФАЛ, корректирующих 1 обрыв. Для доказательства нижней оценки заметим, что в силу теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе в КС Σ, которая реализует ФАЛ f и корректирует p обрывов, для любого набора α, $\alpha \in N_f$, существует не менее, чем $(p+1)$ не пересекающихся по контактами проводящих на наборе α цепей, соединяющих полюса Σ. Если при этом $f = l^{\sigma}_n$ и КС Σ корректирует q замыканий, то каждая из указанных цепей иемет длину не меньше чем $(q+1)n$, и следовательно,

$$|E(\Sigma|_{\alpha})| \geqslant (p+1)(q+1)n \tag{4.5}$$

для любого набора α, $\alpha \in N_f$. Из (4.5) в силу (4.1) при $\delta = N_f$ вытекает, что

$$L^{\text{К}}_{(p,q)}(l^{\sigma}_n) \geqslant (p+1)(q+1)n.$$

Теорема доказана. □

Литература

[1] *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики. М.: МГУ, 2004. (Электронные версии лекций последних лет можно найти по адресу `http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(2-й_поток,_3_курс)`).

[2] *Ложкин С. А.* Дополнительные главы кибернетики и теории управляющих систем. (Электронные версии последних лет можно найти по адресу `http://mk.cs.msu.ru/index.php/Дополнительные_главы_кибернетики_и_теории_управляющих_систем`).

[3] *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007.

[4] *Алексеев В. Б.* Лекции по дискретной математике. — М.: МГУ, 2004.