Примерный вариант коллоквиума № 3

Задача 1 (3 балла). Является ли фактор-кольцо $\mathbb{F}_3[x]/(2x^4 + x^2 + 1)$ полем? Ответ обосновать.

Задача 2 (3 балла). Построить таблицы сложения и умножения элементов $[2x]$, $[x+1]$ и $[2x+2]$ в поле $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$.

Задача 3 (3 балла). Записать в I-й и II-й формах и полиномом по модулю пять функцию $f(x) = \sim (2x^2 \dot{-} 3x^3) \in P_5$.

Задача 4 (3 балла). Представима ли полиномом по модулю четыре функция $f(x) = \max(x^2, 2x-1) \in P_4$. Ответ обосновать.

Задача 5 (3 балла). При помощи алгоритма Евклида найти обратный элемент к элементу $[x^2+2]$ в поле $\mathbb{F}_5/(x^3+x+1)$.

Задача 6 (2 балла). Что такое главный идеал коммутативного и ассоциативного кольца с единицей? Является ли главным идеалом кольца целых чисел с операциями сложения и умножения множество $T = \{8x + 6y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$?

Задача 7 (2 балла). Сформулировать теорему о наибольшем общем делителе двух многочленов над некоторым полем F.

Задача 8 (2 балла). Сформулировать теорему Поста.

Задача 9 (4 балла). Доказать, что функция $f(x,y) = 5J_0(x) + 12x^4y^7 \in P_{36}$ не представима полиномом по модулю 36. Ответ обосновать.