Упражнения по аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля (ZF)

ZF — это теория с равенством сигнатуры $\langle \emptyset, \emptyset, \{\in^{(2)}\} \rangle$. Предметы модели теории ZF называются *множествами*. Оценка символа $\in$ называется *отношением принадлежности элемента множеству*. Первый аргумент этого отношения называется *элементом* второго аргумента.

Упражнение 1

Предложить аксиому, адекватно определяющую в сигнатуре теории ZF

1. константу $\{\emptyset\}$;
2. константу $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$;
3. функциональный символ $\Delta^{(2)}$: $\mathtt{x}\Delta\mathtt{y}$ — симметрическая разность множеств $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$;
4. функциональный символ $!^{(1)}$: $!\mathtt{x}$ — дополнение множества $\mathtt{x}$;
5. функциональный символ $\{\cdot\}^{(1)}$: $\{\mathtt{x}\}$ — множество из одного элемента $\mathtt{x}$;
6. функциональный символ $\{\cdot,\cdot\}^{(2)}$: $\{\mathtt{x},\mathtt{y}\}$ — неупорядоченная пара элементов $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$;
7. функциональный символ $(\cdot,\cdot)^{(2)}$: $(\mathtt{x},\mathtt{y})$ — упорядоченная пара элементов $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$;
8. функциональный символ $\mathbf{fst}^{(1)}$: $\mathbf{fst}(\mathtt{x})$ — первый элемент упорядоченной пары $\mathtt{x}$;
9. функциональный символ $\mathbf{snd}^{(1)}$: $\mathbf{snd}(\mathtt{x})$ — второй элемент упорядоченной пары $\mathtt{x}$;
10. функциональный символ $\times^{(2)}$: $\mathtt{x} \times \mathtt{y}$ — декартово произведение множеств $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$;
11. предикатный символ $\mathrm{BinRel}^{(1)}$: $\mathrm{BinRel}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — бинарное отношение;
12. предикатный символ $\mathrm{Fun}^{(2)}$: $\mathrm{Fun}(\mathtt{x},\mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — функция, всюду определённая на множестве $\mathtt{y}$;
13. предикатный символ $\mathrm{PartFun}^{(2)}$: $\mathrm{PartFun}(\mathtt{x},\mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — функция, частично определённая на множестве $\mathtt{y}$;
14. функциональный символ $\mathbf{dom}^{(1)}$: $\mathbf{dom}(\mathtt{x})$ — область определения функции $\mathtt{x}$;
15. функциональный символ $\mathbf{val}^{(1)}$: $\mathbf{val}(\mathtt{x})$ — область значений функции $\mathtt{x}$;
16. предикатный символ $\mathrm{Inj}^{(1)}$: $\mathrm{Inj}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — инъективное отображение;
17. предикатный символ $\mathrm{Inj}^{(1)}$: $\mathrm{Inj}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — сюръективное отображение;
18. предикатный символ $\mathrm{Inj}^{(1)}$: $\mathrm{Inj}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — биективное отображение;
19. предикатный символ $\mathrm{PartOrd}^{(1)}$: $\mathrm{PartOrd}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — частично упорядоченное множество;
20. предикатный символ $\mathrm{TotOrd}^{(1)}$: $\mathrm{TotOrd}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — линейно упорядоченное множество;
21. предикатный символ $\mathrm{Minimal}^{(2)}$: $\mathrm{Minimal}(\mathtt{x},\mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — минимальный элемент частично упорядоченного множества $\mathtt{y}$;
22. предикатный символ $\mathrm{Least}^{(2)}$: $\mathrm{Least}(\mathtt{x},\mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — наименьший элемент частично упорядоченного множества $\mathtt{y}$;
23. предикатный символ $\mathrm{Maximal}^{(2)}$: $\mathrm{Maximal}(\mathtt{x},\mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — максимальный элемент частично упорядоченного множества $\mathtt{y}$;
24. предикатный символ $\mathrm{Greatest}^{(2)}$: $\mathrm{Greatest}(\mathtt{x},\mathtt{y}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — наибольший элемент частично упорядоченного множества $\mathtt{y}$;

25. предикатный символ $\mathrm{Nat}_0{}^{(1)}$: $\mathrm{Nat}_0(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — натуральное число (*или ноль*);
26. предикатный символ $\leq^{(2)}$: $\mathtt{x} \leq \mathtt{y}$ естественное отношение сравнения натуральных чисел
27. функциональный символ $|\cdot|^{(1)}$: $|x|$ — мощность конечного множества $\mathtt{x}$;
28. функциональный символ $\mathbf{S}^{(1)}$: $\mathbf{S}(\mathtt{x})$ — число, следующее за натуральным числом $\mathtt{x}$;
29. функциональный символ $+^{(2)}$: $\mathtt{x} + \mathtt{y}$ — сумма натуральных чисел $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$;
30. функциональный символ $*^{(2)}$: $\mathtt{x} * \mathtt{y}$ — произведение натуральных чисел $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$
31. предикатный символ $\mathrm{Finite}^{(1)}$: $\mathrm{Finite}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — конечное множество;
32. предикатный символ $\mathrm{FinSeq}^{(1)}$: $\mathrm{FinSeq}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — конечная последовательность;
33. предикатный символ $\mathrm{Seq}^{(1)}$: $\mathrm{Seq}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — последовательность;
34. предикатный символ $\mathrm{Real}^{(1)}$: $\mathrm{Real}(\mathtt{x}) = \mathbf{true} \Leftrightarrow \mathtt{x}$ — действительное число;
35. функциональный символ $+^{(2)}$: $\mathtt{x} + \mathtt{y}$ — сумма действительных чисел;
36. функциональный символ $*^{(2)}$: $\mathtt{x} * \mathtt{y}$ — произведение действительных чисел;
37. константу $\sqrt{2}$;
38. предикатный символ $\leq^{(2)}$: $\mathtt{x} \leq \mathtt{y}$ естественное отношение сравнения действительных чисел

Упражнение 2

Подстановкой определений исключить из формулы символы, не входящие в сигнатуру теории ZF

1. $(\mathtt{x} \cup \mathtt{y}) \setminus \mathtt{z} = \mathtt{u} \cap \mathtt{v}$;
2. $\{\mathtt{x}\} \subseteq \{\mathtt{y}, \mathtt{z}\}$;
3. $\mathtt{x} \notin 2^{\mathtt{y}}$;
4. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \mathtt{x} \to \mathtt{y} = \mathbf{0}$
5. $\mathtt{x} + \mathtt{y} = \mathtt{u} * \mathtt{v}$;
6. $\mathtt{x} + \mathbf{0} = \mathtt{x}$;
7. $\mathbf{2} + \mathbf{2} = \mathbf{4}$.

Аксиомы и схемы аксиом теории ZF

1. *Аксиома объёмности* $A_=$: если множества $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$ состоят из одних и тех же элементов, то они равны.
2. *Аксиома пустого множества* $A_\emptyset$: существует пустое множество $\emptyset$.
3. *Аксиома пары* A_2: для любых множеств $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$ существует множество $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$.
4. *Аксиома объединения* $A_\bigcup$: для любого множества $\mathtt{x}$ существует множество $\bigcup \mathtt{x}$.
5. *Аксиома бесконечности* A_∞: существует множество, включающее в себя теоретико-множественные представления всех натуральных чисел.
6. *Схема выделения* $A_\subseteq[\varphi]$: для любого множества $\mathtt{x}$ существует подмножество $\mathtt{y}$ всех его элементов, обладающих свойством φ, где φ — произвольная формула, не содержащая свободной переменной $\mathtt{y}$.
7. *Аксиома степени* A_p: для любого множества $\mathtt{x}$ существует множество всех подмножеств $\mathtt{x}$.
8. *Схема преобразования* $A_\to[\varphi]$: для любого множества $\mathtt{x}$ верно: если φ — формула, имеющая значение однозначной функции, всюду определённой на $\mathtt{x}$, то существует множество всех φ-образов элементов $\mathtt{x}$.
9. *Аксиома регулярности* $A_\downarrow$: в любом непустом множестве $\mathtt{x}$ содержится элемент $\mathtt{y}$, такой что $\mathtt{x} \cap \mathtt{y} = \emptyset$.

Упражнение 3

Используя аксиомы теории ZF, доказать, что в любой модели этой теории существует единственное

1. множество $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$;
2. множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
3. множество всех простых чисел;
4. множество всех чисел, удовлетворяющих гипотезе Гольдбаха (*любое чётно натуральное число, не меньшее* 4*, разложимо в сумму двух простых чисел*)
5. множество всех целых неотрицательных решений уравнения $\alpha\mathtt{x}^2 + \beta\mathtt{x} + \gamma = 0$ для заданных целых неотрицательных чисел α, β, γ;
6. множество всех элементов, минимальных по включению в существующем множестве $\mathtt{x}$;
7. декартово произведение существующих конечных множеств $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$.
8. множество всех целых неотрицательных чисел, содержащих "н" в названии;

Упражнение 4

Используя аксиомы теории ZF, доказать, что никакая модель этой теории не содержит

1. множество всех множеств;
2. множество всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента;
3. множество n_∞, удовлетворяющего соотношению $n_\infty = n_\infty \cup \{n_\infty\}$
4. множество $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$, где $\mathtt{y}$ — дополнение множества $\mathtt{x}$
5. множество всех одноэлементных множеств;
6. множество $\mathtt{x}$, такое что $2^{\mathtt{x}} \subseteq \mathtt{x}$