

# Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

## Лекция 1

Что такое логика?  
Содержание лекций  
История логики  
Логические парадоксы

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

# Что такое логика?

**Логика**<sup>1</sup> — это наука об общезначимых формах и средствах мысли, необходимых для рационального познания в любой области знания

**Логика**<sup>2</sup> — это нормативная наука о формах и приёмах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка

**Логика**<sup>3</sup> — это наука, которая изучает, каким образом мы выражаем мысли, делаем умозаключения, и как всё это можно представить формально

**Логика**<sup>4</sup> — это наука о правильных способах рассуждения, то есть таких, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты

---

<sup>1</sup> Философский энциклопедический словарь.

<sup>2</sup> Бочаров, Маркин. Основы логики.

<sup>3</sup> Метакидес, Нероуд. Принципы логики и логического программирования.

<sup>4</sup> Успенский, Верещагин, Плиско. Вводный курс математической логики.

# Что такое логика?

**Формальная логика**<sup>1</sup> — это наука о законах знания, полученного из ранее установленных и проверенных истин, без обращения в каждом конкретном случае к опыту, а только в результате применения законов и правил мышления

**Формальная логика**<sup>2</sup> — в современном понимании это синоним логики

**Математическая логика**<sup>3</sup> — это 1) логика, развиваемая с помощью математических методов, 2) логика, используемая в математике

**Математическая логика**<sup>4</sup> — это раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики

---

<sup>1</sup> Кондаков. Логический словарь-справочник.

<sup>2</sup> Философский энциклопедический словарь.

<sup>3</sup> Клини. Математическая логика.

<sup>4</sup> Математическая энциклопедия.

# Что такое логика?

Формальная математическая логика изучает:

- ▶ законы причинно-следственной связи в окружающем мире
- ▶ проявление этих законов в рациональном мышлении человека
- ▶ отражение этих законов в языках:
  - ▶ как естественных,
  - ▶ так и искусственных
- ▶ **формы**, в которых проявляются эти законы, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся

# Что такое логика?

Например:

Посылки:

1: Все люди смертны

2: Сократ человек

Следствие:

Сократ смертен

Это известный силлогизм

# Что такое логика?

Например:

Посылки:

1: Каждый металл — проводник

2: Ртуть — металл

Следствие:

Ртуть — проводник

Это физическое суждение

# Что такое логика?

Например:

Посылки:

1: Инертные газы химически неактивны

2: Гелий — инертный газ

Следствие:

Гелий химически неактивен

Это химическое суждение

# Что такое логика?

Например:

Посылки:

- 1: Во всех южных городах летом тепло
- 2: Ставрополь — южный город

Следствие:

В Ставрополе летом тепло

Это “бытовое” географическое суждение



# Что такое логика?

Например:

Посылки:

- 1: Каждый предмет, обладающий свойством **A**,  
обладает и свойством **B**
- 2: Предмет **c** обладает свойством **A**

Следствие:

Предмет **c** обладает свойством **B**

Это закон логики

# Что такое логика?

Например:

$$1: \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

$$2: A(c)$$

---

$$B(c)$$

Это тот же закон, записанный **формально**

# Что такое логика?

Законами логики описываются универсальные способы получения новых **знаний** из имеющихся, не зависящие от природы этих знаний

Например, закон

$$\frac{\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \quad A(c)}{B(c)}$$

может быть интерпретирован как упомянутое **физическое суждение**, если:

- ▶ “A(x)” = “x — металл”
- ▶ “B(x)” = “x — проводник”
- ▶ “c” = “ртуть”

# Что такое логика?

Законами логики описываются универсальные способы получения новых **знаний** из имеющихся, не зависящие от природы этих знаний

**Например**, закон

$$\frac{\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \quad A(c)}{B(c)}$$

может быть **интерпретирован** как упомянутое **химическое суждение**, если:

- ▶ “A(x)” = “x — инертный газ”
- ▶ “B(x)” = “x — химически неактивный элемент”
- ▶ “c” = “гелий”

# Что такое логика?

Исходные знания:

1: Каждый металл — проводник

2: Ртуть — металл

---

Новые знания:

Ртуть — проводник

Как расценивать новые знания?

Откуда они взялись?

Узнали ли мы что-нибудь новое о мире?

# Что такое логика?

Знание — это

форма представления информации; формальное высказывание

Закон формальной логики — это

принцип преобразования одних высказываний в другие

Формальная логика позволяет

преобразовывать форму представления информации,  
но не позволяет получать новую информацию

Таким образом,

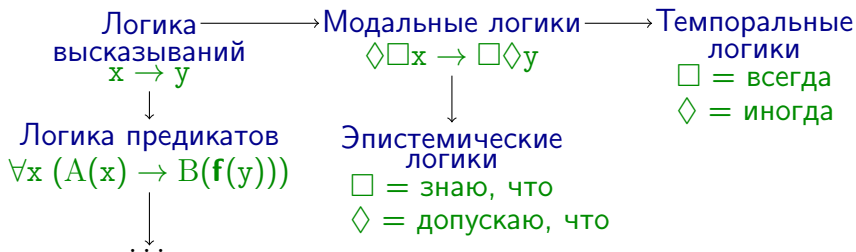
законы формальной логики —  
это инструмент преобразования информации

# Содержание лекций

Способ представления знаний и принципы работы с ними определяются тем, как выбраны:

- ▶ интересующие особенности высказываний
- ▶ формальный язык, адекватно описывающий эти особенности
- ▶ средства анализа высказываний выбранного языка

Разделы логики, которые встретятся в курсе:



# Содержание лекций

Элементарные составные части “реальных” высказываний часто имеют смысл, заданный способами, выходящими за рамки логики

*Например, высказывание “дважды два — четыре” включает в себя смысл понятий “два”, “четыре”, “умножить” и “равно”*

На том, как можно

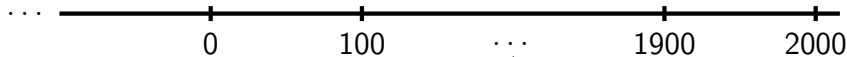
- ▶ определять и анализировать нелогические понятия средствами логики и
- ▶ отличать “хорошие” определения и методы анализа от “плохих”,

будет сосредоточено внимание в разделе курса

## Аксиоматические теории

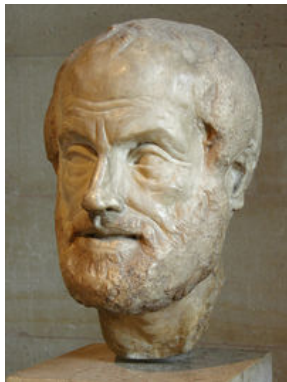


# Кто это всё придумал?



это временная шкала (гг. н.э.)

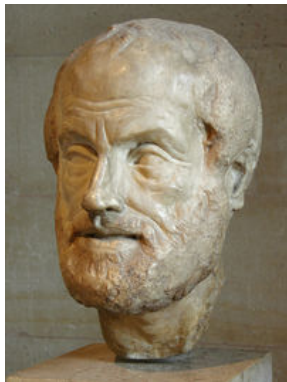
# История логики



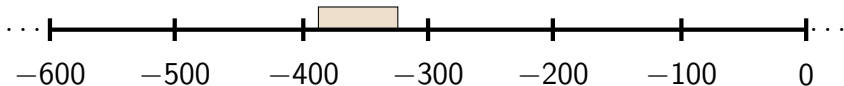
Аристотель



# История логики

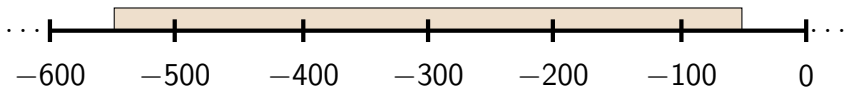


Аристотель

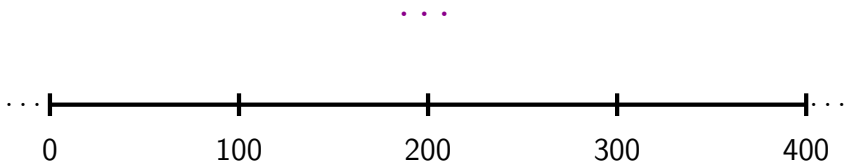


# История логики

Древняя Греция



# История логики



# История логики

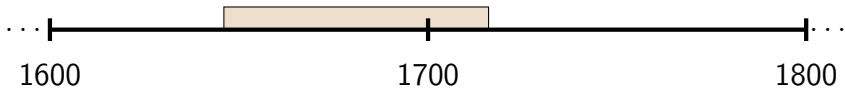
Средние века  
Возрождение  
начало Нового времени



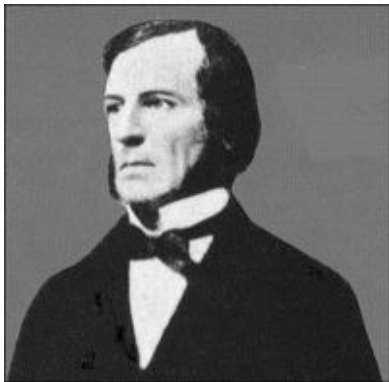
# История логики



Готфрид Лейбниц



# История логики



Джордж Буль

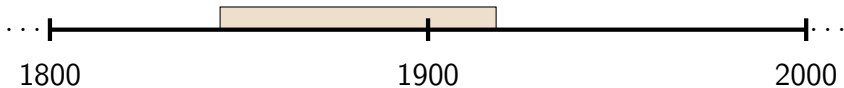




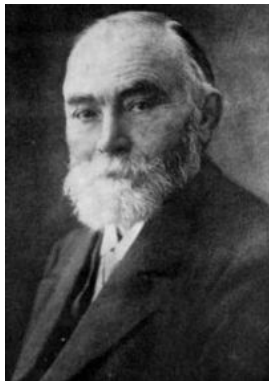
# История логики



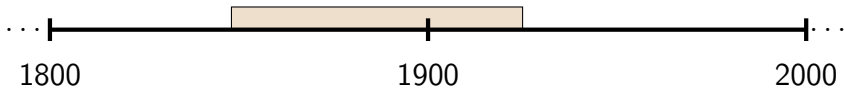
Георг Кантор



# История логики



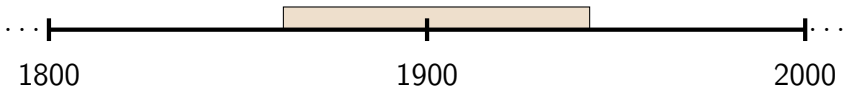
Готлоб Фреге



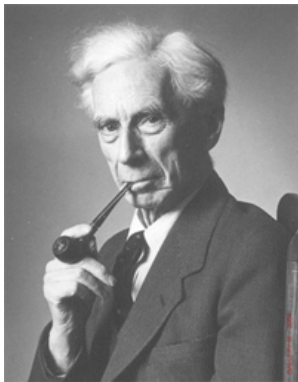
# История логики



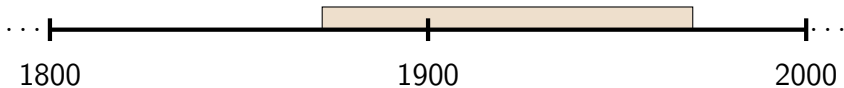
Давид Гильберт



# История логики



Бертран Рассел



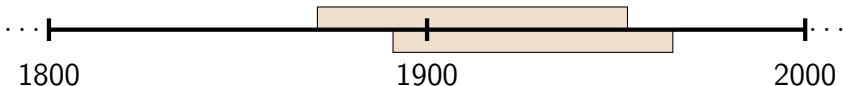
# История логики



Эрнст Цермело



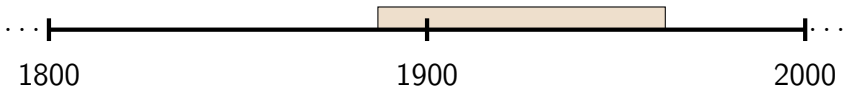
Абрахам Френкель



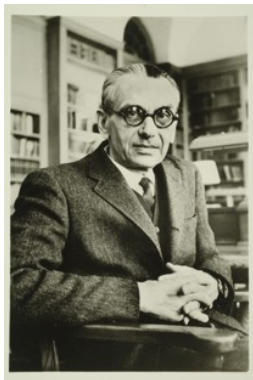
# История логики



Туральф Скулем  
(Торальф Сколем)



# История логики



Курт Гёдель



# История логики



Альфред Тарский

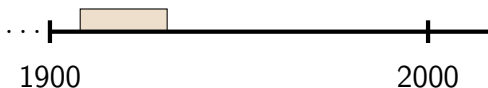




# История логики



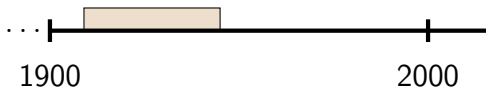
Жак Эрбран



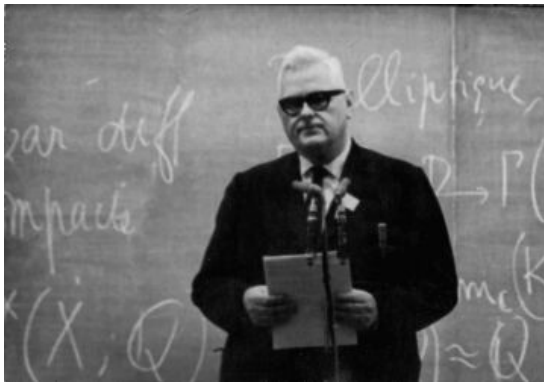
# История логики



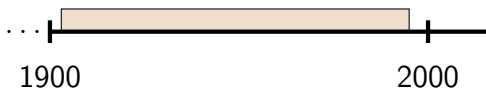
Герхард Генцен



# История логики



Алонзо Чёрч



# История логики



Стивен Клини



# История логики



Анатолий Мальцев



# История логики



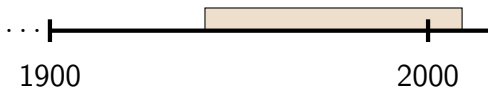
Сол Крипке



# История логики



Амир Пнуэли



# История логики



Роберт Флloyd



Тони Хоар  
(Чарльз Энтони Ричард)





# История логики



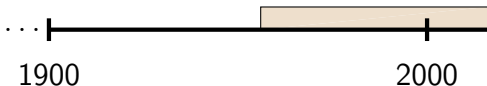
Ален Колмероз



# История логики



Михаил Захарьяцев



Что движет  
развитием логики?

# Логические парадоксы

## Парадоксы — движущая сила логики

Они заставляют задумываться над такими вопросами, как

- ▶ Что такое истинное утверждение?
- ▶ Что такое доказуемое утверждение?
- ▶ В какой мере можно “механизировать” рассудочное мышление?

# Логические парадоксы

*(все знают этот парадокс, с него и начнём)*

Парадокс лжеца

Это утверждение ложно

Ложно ли утверждение выше?

# Логические парадоксы

*(а это должны знать все математики)*

## Парадокс Рассела

Пусть  $\Omega$  — множество всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента:

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \notin \omega\}$$

Верно ли, что  $\Omega \in \Omega$ ?

# Логические парадоксы

## Дилемма крокодила

Крокодил схватил ребенка.

Мать ребенка просит крокодила:

“Верни мне ребенка!”

Крокодил отвечает:

“Я верну тебе ребенка, если ты угадаешь, исполню ли я твою просьбу”

Если мать ответит “вернёшь”, она получит ребёнка?

А если мать ответит “не вернёшь”?

# Логические парадоксы

## Парадокс утренней звезды

Венера видна **ранним утром**, и поэтому её называют  
“**утренней звездой**”

Венера видна **поздним вечером**, и поэтому её называют  
“**вечерней звездой**”

Означает ли это, что **утренняя звезда**  
видна **поздним вечером**?



# Логические парадоксы

## Парадокс лысого

(он же “парадокс кучи”)

Если у человека нет ни одного волоса, то он лыс

Если у лысого вырастет ещё один волосок, то он останется лысым

Значит, **все люди лысые?**

# Логические парадоксы

## Парадокс лошадей

**Теорема.** Все лошади имеют одинаковый окрас

Доказательство (индукцией по числу лошадей).

*База индукции.* В каждой группе, состоящей из **одной** лошади, все лошади имеют одинаковый окрас.

*Индуктивный переход.* Рассмотрим группу из  $(N + 1)$ -й лошади,  $N \geq 1$ . Выберем две произвольные различные лошади  $A$  и  $B$ . Исключим из группы лошадь  $A$ : оставшиеся имеют одинаковый окрас, в том числе  $B$ . Исключим из группы лошадь  $B$ : оставшиеся имеют одинаковый окрас, в том числе  $A$ . Значит, все лошади в группе имеют одинаковый окрас. ▼

Как строго доказать, что это **доказательство** неверно?

# Логические парадоксы

## Парадокс морской битвы

Флотоводец обратился к прорицателю с вопросом, состоится ли завтра морская битва. Прорицатель ответил: “Битва завтра состоится”.

На следующий день случился шторм, и флот не смог выйти в море. Разгневанный флотоводец потребовал от прорицателя вернуть деньги, поскольку его прогноз оказался ложным.

Прорицатель ответил: “Твои моряки вчера купили на рынке свежее молоко. Сегодня это молоко уже не свежее, но они не просят вернуть им деньги обратно. Мой прогноз тоже был верным вчера, и ты не вправе жаловаться на то, что он неверен сегодня”.

**Прав ли прорицатель?**

Парадоксы неизбежны,  
но их влияние можно ограничить

Для этого нужны  
математические модели логических законов

Так и появилась  
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА**