Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 19.

Интуиционистская логика.

Что же такое математическая логика?

Что же такое математическая логика?

- формальный язык описания знаний;

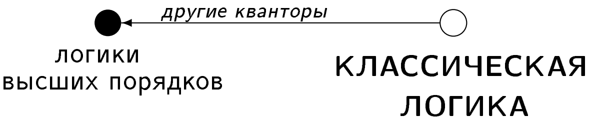
Что же такое математическая логика?

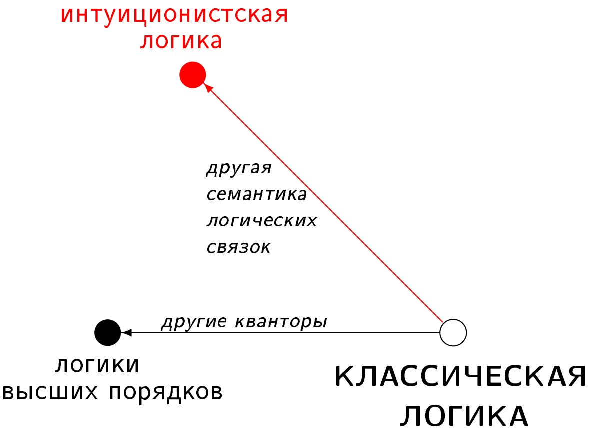
- формальный язык описания знаний;
- средства извлечения одних знаний из других;

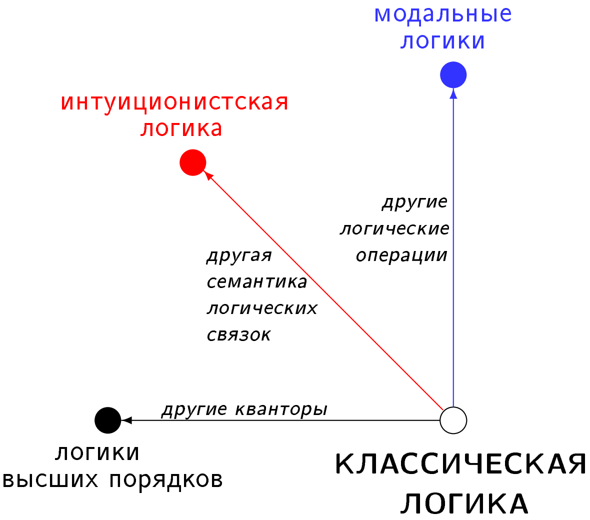
Что же такое математическая логика?

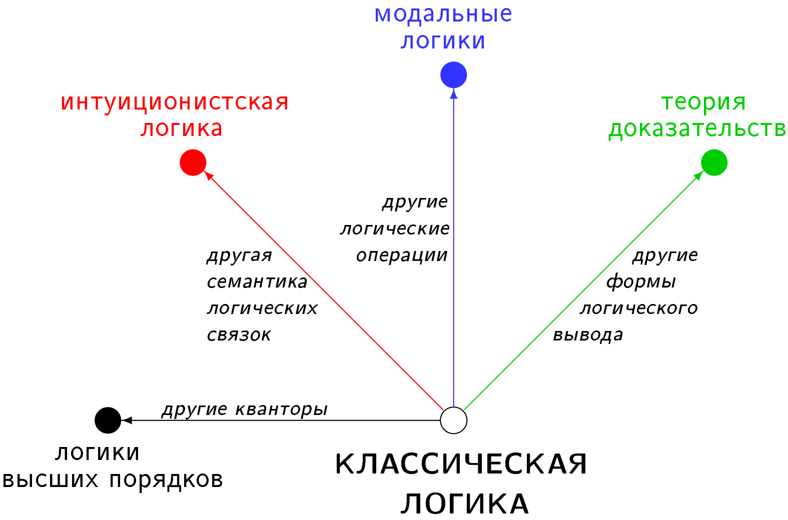
- формальный язык описания знаний;
- средства извлечения одних знаний из других;
- система организации математических знаний.

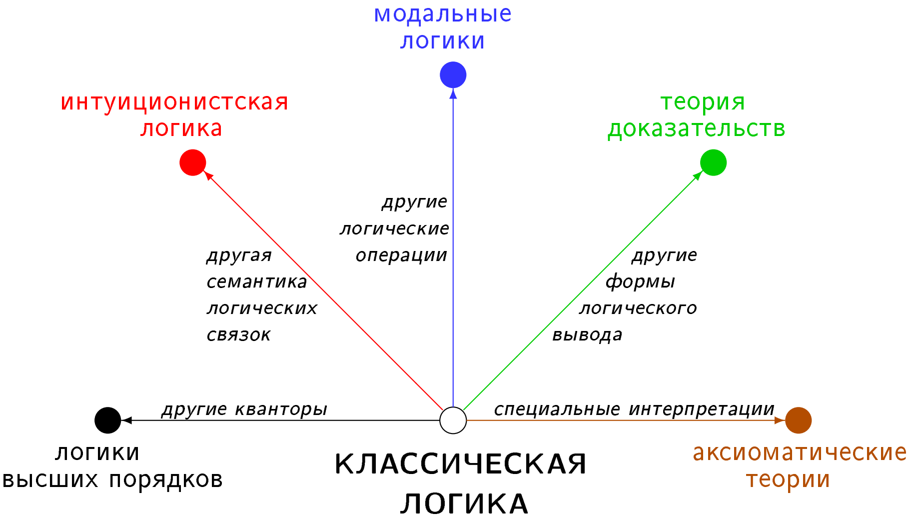
КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА


другие кванторы
логики
высших порядков
КЛАССИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА


интуиционистская
логика
другая
семантика
логических
связок
другие кванторы
логики
высших порядков
КЛАССИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА


модальные логики
интуиционистская логика
другие логические операции
другая семантика логических связок
другие кванторы
логики высших порядков
КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА


модальные логики
интуиционистская логика
теория доказательств
другие логические операции
другая семантика логических связок
другие формы логического вывода
другие кванторы
логики высших порядков
КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА


модальные
логики
интуиционистская
логика
теория
доказательств
другие
логические
операции
другая
семантика
логических
связок
другие
формы
логического
вывода
другие кванторы
специальные интерпретации
логики
высших порядков
КЛАССИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА
аксиоматические
теории

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Интуиционизм — это философское течение в математике, возникшее в начале 20 века как критический отклик на неограниченное применение формальных логических методов в математике, приводящее к парадоксам (антиномиям).
По мнению интуиционистов (Брауэр, Вейль, Пуанкаре), парадоксы возникают в связи с тем, что законы логики, справедливые для конечных множеств, безосновательно переносятся на бесконечные множества.

Интуиционистская логика

Интуиционизм — это философское течение в математике, возникшее в начале 20 века как критический отклик на неограниченное применение формальных логических методов в математике, приводящее к парадоксам (антиномиям).
По мнению интуиционистов (Брауэр, Вейль, Пуанкаре), парадоксы возникают в связи с тем, что законы логики, справедливые для конечных множеств, безосновательно переносятся на бесконечные множества.

Не все математические утверждения, верные для конечных множеств, остаются справедливыми и для бесконечных множеств. Например, для конечных множеств верен принцип Архимеда «**Часть всегда меньше целого**», а для бесконечных множеств — нет.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Интуиционизм — это философское течение в математике, возникшее в начале 20 века как критический отклик на неограниченное применение формальных логических методов в математике, приводящее к парадоксам (антиномиям).
По мнению интуиционистов (Брауэр, Вейль, Пуанкаре), парадоксы возникают в связи с тем, что законы логики, справедливые для конечных множеств, безосновательно переносятся на бесконечные множества.

Не все математические утверждения, верные для конечных множеств, остаются справедливыми и для бесконечных множеств. Например, для конечных множеств верен принцип Архимеда «**Часть всегда меньше целого**», а для бесконечных множеств — нет.

Вполне возможно, что не все законы классической (аристотелевой) логики допускают неограниченное и безоговорочное использование в математике.

Интуиционистская логика

Например, рассмотрим одну широко распространенную схему доказательства.

Доказать: Если выполнены условия A, то $\exists x\ P(x)$.

Интуиционистская логика

Например, рассмотрим одну широко распространенную схему доказательства.

Доказать: Если выполнены условия A, то $\exists x\ P(x)$.

Схема доказательства: Предположим противное, т. е. $\forall x\ \neg P(x)$. Тогда ...(фа-фа, ля-ля)..., что противоречит условиям A. Значит, предположение $\forall x\ \neg P(x)$ неверно, и поэтому $\exists x\ P(x)$.

QED

Интуиционистская логика

Например, рассмотрим одну широко распространенную схему доказательства.

Доказать: Если выполнены условия A, то $\exists x\ P(x)$.

Схема доказательства: Предположим противное, т. е. $\forall x\ \neg P(x)$. Тогда ...(фа-фа, ля-ля)..., что противоречит условиям A. Значит, предположение $\forall x\ \neg P(x)$ неверно, и поэтому $\exists x\ P(x)$.

QED

Все хорошо, но где же то значение x, для которого верно $P(x)$? Из такого доказательства это значение извлечь невозможно.

Но тогда, по мнению интуиционистов, это не доказательство, а словоблудие.

Интуиционистская логика

Например, рассмотрим одну широко распространенную схему доказательства.

Доказать: Если выполнены условия A, то $\exists x\ P(x)$.

Схема доказательства: Предположим противное, т. е. $\forall x\ \neg P(x)$. Тогда ...(фа-фа, ля-ля)..., что противоречит условиям A. Значит, предположение $\forall x\ \neg P(x)$ неверно, и поэтому $\exists x\ P(x)$.

QED

Все хорошо, но где же то значение x, для которого верно $P(x)$? Из такого доказательства это значение извлечь невозможно.

Но тогда, по мнению интуиционистов, это не доказательство, а словоблудие.

Чтобы исключить доказательства такого рода, нужно пересмотреть семантику логических связок и кванторов.

Интуиционистская логика

Семантика Колмогорова–Брауэра–Гейтинга

Попробуем взглянуть на логические формулы как на утверждения о разрешимости математических задач.

Интуиционистская логика

Семантика Колмогорова–Брауэра–Гейтинга

Попробуем взглянуть на логические формулы как на утверждения о разрешимости математических задач.

Каждая атомарная формула A будет обозначать некоторую задачу. Истинность A будет означать, что задача имеет решение, и это решение можно предъявить. Ложность A будет означать, что задача решения не имеет.

Интуиционистская логика

Семантика Колмогорова–Брауэра–Гейтинга

Попробуем взглянуть на логические формулы как на утверждения о разрешимости математических задач.

Каждая атомарная формула A будет обозначать некоторую задачу. Истинность A будет означать, что задача имеет решение, и это решение можно предъявить. Ложность A будет означать, что задача решения не имеет.

Логические связки позволяют конструировать из простых задач составные задачи.

Оценим, как (не)разрешимость составных задач зависит от (не)разрешимости простых задач.

Интуиционистская логика

Семантика Колмогорова–Брауэра–Гейтинга

$\varphi \,\&\, \psi$: Решить обе задачи φ и ψ и предъявить решение;

Интуиционистская логика

Семантика Колмогорова–Брауэра–Гейтинга

$\varphi \,\&\, \psi$:	Решить обе задачи φ и ψ и предъявить решение;
$\varphi \vee \psi$:	Выбрать одну из двух задач φ и ψ, решить выбранную задачу и предъявить решение;

Интуиционистская логика

Семантика Колмогорова–Брауэра–Гейтинга

$\varphi \mathbin{\&} \psi$:	Решить обе задачи φ и ψ и предъявить решение;
$\varphi \vee \psi$:	Выбрать одну из двух задач φ и ψ, решить выбранную задачу и предъявить решение;
$\varphi \to \psi$:	Показать, что решение задачи ψ сводится к решению задачи φ, т. е. предъявить способ, который позволяет, располагая решением задачи φ, построить решение задачи ψ;

Семантика Колмогорова–Брауэра–Гейтинга

$\varphi \mathbin{\&} \psi$:	Решить обе задачи φ и ψ и предъявить решение;
$\varphi \vee \psi$:	Выбрать одну из двух задач φ и ψ, решить выбранную задачу и предъявить решение;
$\varphi \to \psi$:	Показать, что решение задачи ψ сводится к решению задачи φ, т. е. предъявить способ, который позволяет, располагая решением задачи φ, построить решение задачи ψ;
$\neg \varphi$:	Доказать, что задача φ не имеет решения.

Законами интуиционистской логики считаются только те формулы, которые соответствуют описаниям составных задач, имеющих решение при любых условиях.

Интуиционистская логика

Законы интуиционистской логики

- $P \to P$ — каждую задачу можно свести к ней самой;

Интуиционистская логика

Законы интуиционистской логики

- $P \to P$ — каждую задачу можно свести к ней самой;
- $(P \to Q)\&(Q \to R) \to (P \to R)$ — чтобы свести задача R к задаче P достаточно найти задачу Q, к которой можно свести задачу R, и которую, в свою очередь, можно свести к задаче P;

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Законы интуиционистской логики

- $P \to P$ — каждую задачу можно свести к ней самой;
- $(P \to Q)\&(Q \to R) \to (P \to R)$ — чтобы свести задача R к задаче P достаточно найти задачу Q, к которой можно свести задачу R, и которую, в свою очередь, можно свести к задаче P;
- $P \to \neg\neg P$ — чтобы убедиться в том, что не существует доказательства неразрешимости задачи P, достаточно найти решение задачи P;

Интуиционистская логика

Законы интуиционистской логики

- $P \to P$ — каждую задачу можно свести к ней самой;
- $(P \to Q)\&(Q \to R) \to (P \to R)$ — чтобы свести задача R к задаче P достаточно найти задачу Q, к которой можно свести задачу R, и которую, в свою очередь, можно свести к задаче P;
- $P \to \neg\neg P$ — чтобы убедиться в том, что не существует доказательства неразрешимости задачи P, достаточно найти решение задачи P;
- $(\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P\&Q)$ — чтобы показать, что обе задачи P и Q нельзя решить одновременно, достаточно выбрать одну из этих задач и показать, что она неразрешима.

Интуиционистская логика

Формулы, не являющиеся законами интуиционистской логики

- $\neg\neg P \to P$ — если вы можете обосновать, что нельзя построить доказательства неразрешимости задачи P, то этого еще недостаточно, чтобы получить решение самой задачи P;

Интуиционистская логика

Формулы, не являющиеся законами интуиционистской логики

- $\neg\neg P \to P$ — если вы можете обосновать, что нельзя построить доказательства неразрешимости задачи P, то этого еще недостаточно, чтобы получить решение самой задачи P;
- $P \vee \neg P$ — неправда, что для любой задачи можно либо получить решение, либо доказать, что никакого решения не существует;

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Формулы, не являющиеся законами интуиционистской логики

- $\neg\neg P \to P$ — если вы можете обосновать, что нельзя построить доказательства неразрешимости задачи P, то этого еще недостаточно, чтобы получить решение самой задачи P;
- $P \vee \neg P$ — неправда, что для любой задачи можно либо получить решение, либо доказать, что никакого решения не существует;
- $\neg(P \& Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$ — если можно доказать, что обе задачи P и Q нельзя решить одновременно, то это не дает основания считать, что хотя бы одна из них является неразрешимой.

Интуиционистская логика

Формулы, не являющиеся законами интуиционистской логики

- $\neg\neg P \to P$ — если вы можете обосновать, что нельзя построить доказательства неразрешимости задачи P, то этого еще недостаточно, чтобы получить решение самой задачи P;
- $P \vee \neg P$ — неправда, что для любой задачи можно либо получить решение, либо доказать, что никакого решения не существует;
- $\neg(P \& Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$ — если можно доказать, что обе задачи P и Q нельзя решить одновременно, то это не дает основания считать, что хотя бы одна из них является неразрешимой.

Да как же это так?
Уж не скрывается ли здесь простая игра слов?

Интуиционистская логика

Попробуем строго определить семантику утверждений, касающихся разрешимости задач.

Интуиционистская логика

Попробуем строго определить семантику утверждений, касающихся разрешимости задач.
Истинность формул оценивается в интерпретациях. Поскольку задачи решают люди, в качестве интерпретаций могут выступать способности людей решать задачи.

Интуиционистская логика

Попробуем строго определить семантику утверждений, касающихся разрешимости задач.

Истинность формул оценивается в интерпретациях. Поскольку задачи решают люди, в качестве интерпретаций могут выступать способности людей решать задачи.

Но эти способности у людей со временем изменяются. Значит, интерпретации должны быть динамическими .

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Попробуем строго определить семантику утверждений, касающихся разрешимости задач.
Истинность формул оценивается в интерпретациях. Поскольку задачи решают люди, в качестве интерпретаций могут выступать способности людей решать задачи.
Но эти способности у людей со временем изменяются. Значит, интерпретации должны быть динамическими .
Рассмотрим модель идеального математика (**Dutch Mathematician**), который

- может пребывать в разных состояниях знания и переходить из одних состояний знания в другие;

Интуиционистская логика

Попробуем строго определить семантику утверждений, касающихся разрешимости задач.
Истинность формул оценивается в интерпретациях. Поскольку задачи решают люди, в качестве интерпретаций могут выступать способности людей решать задачи.
Но эти способности у людей со временем изменяются. Значит, интерпретации должны быть динамическими .
Рассмотрим модель идеального математика (**Dutch Mathematician**), который

- может пребывать в разных состояниях знания и переходить из одних состояний знания в другие;
- в каждом состоянии знания он точно знает, какие из элементарных задач он умеет решать, а какие нет;

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Попробуем строго определить семантику утверждений, касающихся разрешимости задач.
Истинность формул оценивается в интерпретациях. Поскольку задачи решают люди, в качестве интерпретаций могут выступать способности людей решать задачи.
Но эти способности у людей со временем изменяются. Значит, интерпретации должны быть динамическими .
Рассмотрим модель идеального математика (**Dutch Mathematician**), который

- может пребывать в разных состояниях знания и переходить из одних состояний знания в другие;
- в каждом состоянии знания он точно знает, какие из элементарных задач он умеет решать, а какие нет;
- не утрачивает навыков решения задач при переходе из одного состояния знания в другое.

Интуиционистская логика

Определение (модель Крипке)

Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ — множество атомарных формул (названия задач).

Интуиционистская интерпретация — это реляционная система $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$, в которой

Интуиционистская логика

Определение (модель Крипке)

Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ — множество атомарных формул (названия задач).

Интуиционистская интерпретация — это реляционная система $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$, в которой

1. $S \neq \emptyset$ — множество состояний (состояний знания);

Интуиционистская логика

Определение (модель Крипке)

Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ — множество атомарных формул (названия задач).

Интуиционистская интерпретация — это реляционная система $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$, в которой

1. $S \neq \emptyset$ — множество состояний (состояний знания);
2. $\mathbf{R} \subseteq S \times S$ — отношение переходов на S, которое является отношением нестрогого частичного порядка:
   рефлексивное $R(s, s)$;
   транзитивное $R(s_1, s_2) \& R(s_2, s_3) \Rightarrow R(s_1, s_3)$;
   антисимметричное $R(s_1, s_2) \& R(s_2, s_1) \Rightarrow s_1 = s_2$;

Интуиционистская логика

Определение (модель Крипке)

Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$ — множество атомарных формул (названия задач).

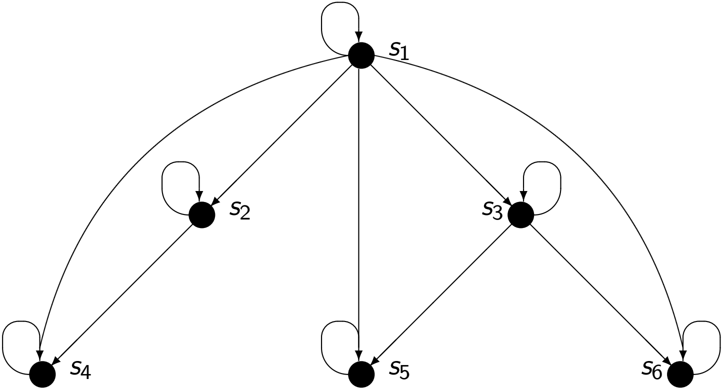
Интуиционистская интерпретация — это реляционная система $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$, в которой

1. $S \neq \emptyset$ — множество состояний (состояний знания);
2. $\mathbf{R} \subseteq S \times S$ — отношение переходов на S, которое является отношением нестрогого частичного порядка:
   рефлексивное $R(s, s)$;
   транзитивное $R(s_1, s_2) \& R(s_2, s_3) \Rightarrow R(s_1, s_3)$;
   антисимметричное $R(s_1, s_2) \& R(s_2, s_1) \Rightarrow s_1 = s_2$;
3. $\xi : S \times \mathcal{P} \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ — оценка атомарных формул, удовлетворяющая условию монотонности:

$$R(s_1, s_2) \ \& \ \xi(s_1, P) = \mathbf{true} \implies \xi(s_2, P) = \mathbf{true}.$$

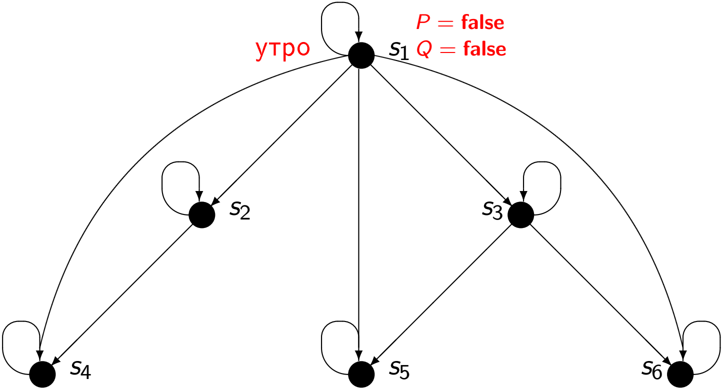
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



Интуиционистская логика

Пример интуиционистской интерпретации

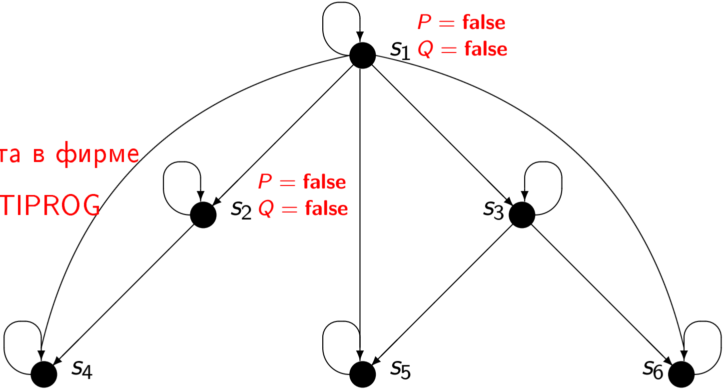


ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации

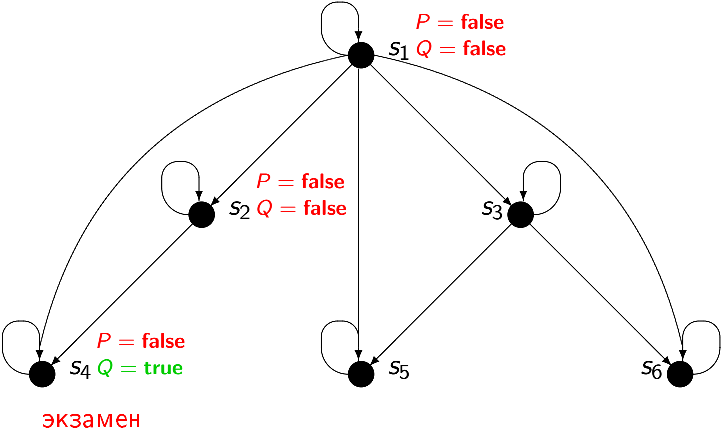
работа в фирме

MULTIPROG



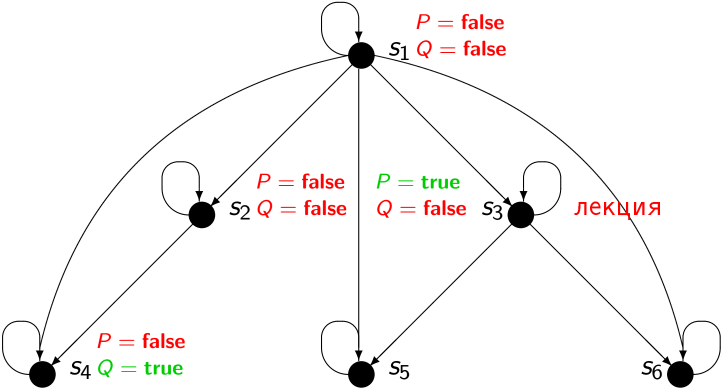
Интуиционистская логика

Пример интуиционистской интерпретации



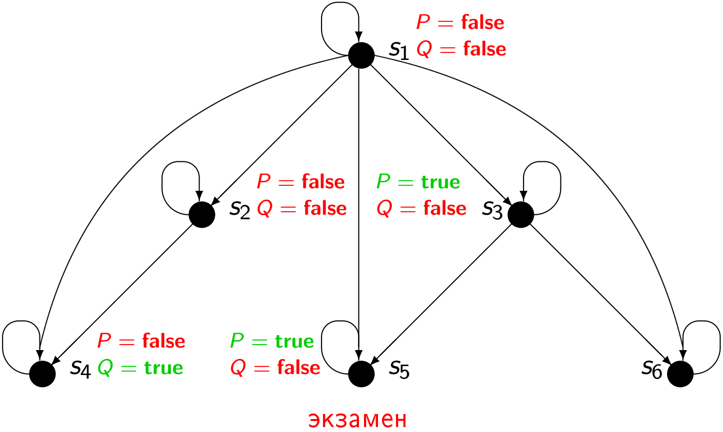
Интуиционистская логика

Пример интуиционистской интерпретации



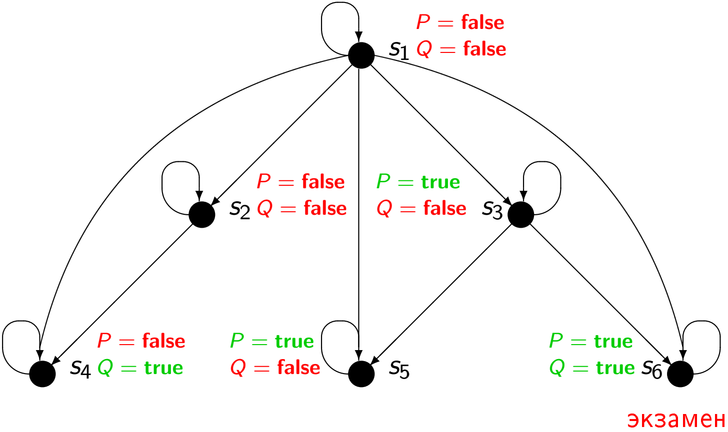
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



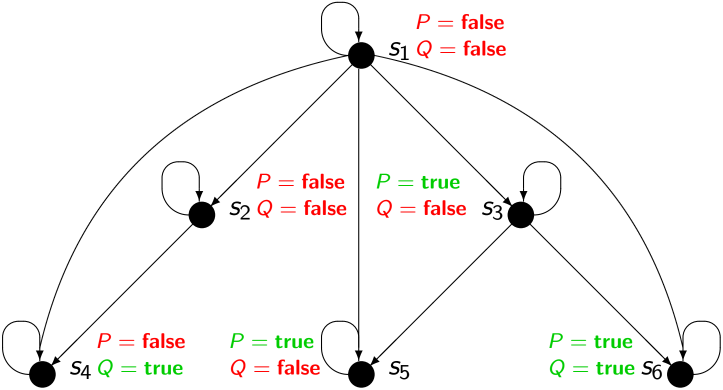
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



Интуиционистская логика

Определение (семантика Крипке)

Пусть $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — интуиционистская интерпретация. Тогда отношение выполнимости $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi$ формулы φ в состоянии s интерпретации I определяется так:

1. если $\varphi = P \in \mathcal{P}$, то $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi \iff \xi(s, P) = \mathbf{true}$;

Интуиционистская логика

Определение (семантика Крипке)

Пусть $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — интуиционистская интерпретация. Тогда отношение выполнимости $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi$ формулы φ в состоянии s интерпретации I определяется так:

1. если $\varphi = P \in \mathcal{P}$, то $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi \iff \xi(s, P) = \textbf{true}$;
2. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \& \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ и $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;

Интуиционистская логика

Определение (семантика Крипке)

Пусть $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — интуиционистская интерпретация. Тогда отношение выполнимости $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi$ формулы φ в состоянии s интерпретации I определяется так:

1. если $\varphi = P \in \mathcal{P}$, то $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi \iff \xi(s, P) = \mathbf{true}$;
2. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \& \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ и $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
3. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ или $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Определение (семантика Крипке)

Пусть $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — интуиционистская интерпретация. Тогда отношение выполнимости $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi$ формулы φ в состоянии s интерпретации I определяется так:

1. если $\varphi = P \in \mathcal{P}$, то $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi \iff \xi(s, P) = \mathbf{true}$;
2. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \& \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ и $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
3. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ или $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
4. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \iff$ для любого состояния s', если $(s, s') \in \mathbf{R}$ и $I, s' \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$, то $I, s' \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;

Интуиционистская логика

Определение (семантика Крипке)

Пусть $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — интуиционистская интерпретация. Тогда отношение выполнимости $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi$ формулы φ в состоянии s интерпретации I определяется так:

1. если $\varphi = P \in \mathcal{P}$, то $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi \iff \xi(s, P) = \mathbf{true}$;
2. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \& \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ и $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
3. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ или $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
4. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \iff$ для любого состояния s', если $(s, s') \in \mathbf{R}$ и $I, s' \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$, то $I, s' \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
5. $I, s \models_{\mathcal{I}} \neg\varphi_1 \iff$ для любого состояния s', если $(s, s') \in \mathbf{R}$, то $I, s' \not\models_{\mathcal{I}} \varphi_1$.

Интуиционистская логика

Определение (семантика Крипке)

Пусть $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — интуиционистская интерпретация. Тогда отношение выполнимости $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi$ формулы φ в состоянии s интерпретации I определяется так:

1. если $\varphi = P \in \mathcal{P}$, то $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi \iff \xi(s, P) = \mathbf{true}$;
2. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \& \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ и $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
3. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ или $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
4. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \to \varphi_2 \iff$ для любого состояния s', если $(s, s') \in \mathbf{R}$ и $I, s' \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$, то $I, s' \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
5. $I, s \models_{\mathcal{I}} \neg\varphi_1 \iff$ для любого состояния s', если $(s, s') \in \mathbf{R}$, то $I, s' \not\models_{\mathcal{I}} \varphi_1$.

Формула φ называется интуиционистски общезначимой (законом интуиционистской логики), если для любой интерпретации I и для любого состояния s верно $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi$.

Интуиционистская логика

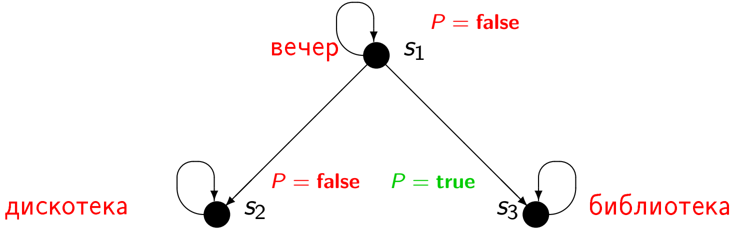
Пример необщезначимой формулы

$$\not\models_{\mathcal{I}} P \vee \neg P$$

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример необщезначимой формулы

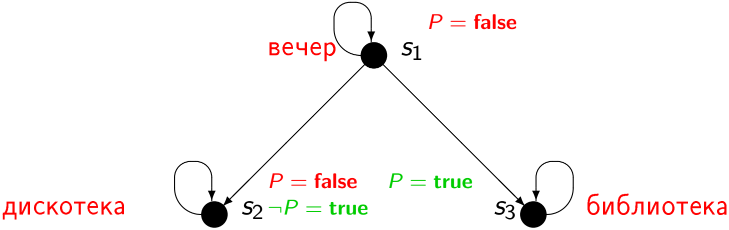
$$\not\models_{\mathcal{I}} P \vee \neg P$$



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример необщезначимой формулы

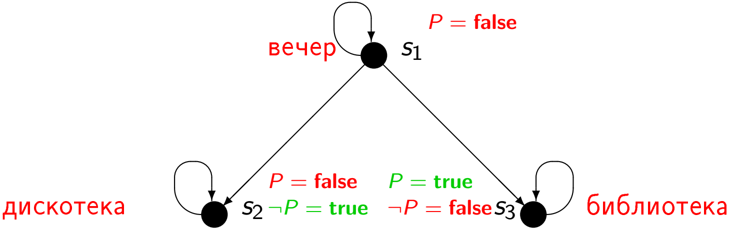
$$\not\models_{\mathcal{I}} P \vee \neg P$$



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример необщезначимой формулы

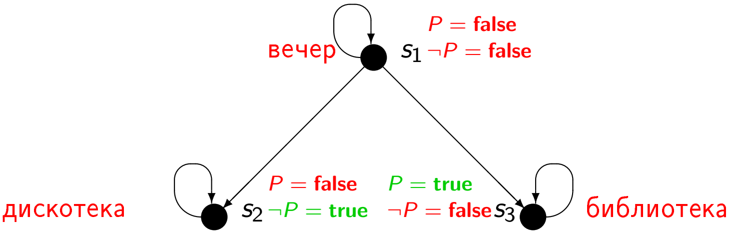
$$\not\models_{\mathcal{I}} P \vee \neg P$$



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример необщезначимой формулы

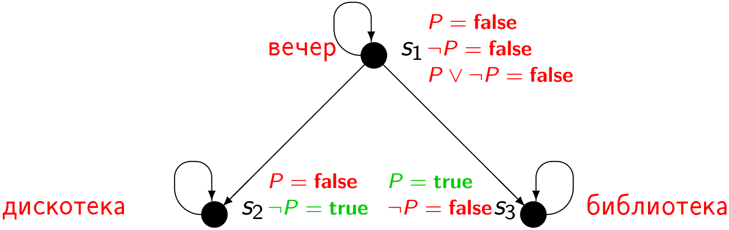
$$\not\models_{\mathcal{I}} P \vee \neg P$$



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример необщезначимой формулы

$$\not\models_{\mathcal{I}} P \vee \neg P$$



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Другие необщезначимые формулы

Докажите самостоятельно, выбрав подходящую интерпретацию (контрмодель) I,

$$\not\models_{\mathcal{I}} \neg\neg P \to P$$

$$\not\models_{\mathcal{I}} \neg(P \& Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\not\models_{\mathcal{I}} \neg(P \vee Q) \to (\neg P \& \neg Q)$$

Интуиционистская логика

Пример общезначимой формулы

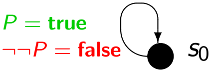
$$\models_{\mathcal{I}} P \to \neg\neg P$$

Интуиционистская логика

Пример общезначимой формулы

$$\models_{\mathcal{I}} P \to \neg\neg P$$

От противного. Допустим, что $I, s_0 \not\models P \to \neg\neg P$. Тогда

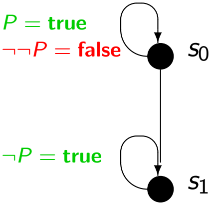


Интуиционистская логика

Пример общезначимой формулы

$$\models_{\mathcal{I}} P \to \neg\neg P$$

От противного. Допустим, что $I, s_0 \not\models P \to \neg\neg P$. Тогда

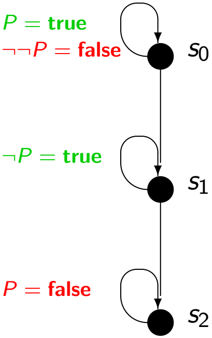


ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример общезначимой формулы

$$\models_{\mathcal{I}} P \to \neg\neg P$$

От противного. Допустим, что $I, s_0 \not\models P \to \neg\neg P$. Тогда

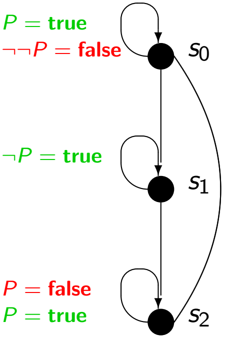


ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример общезначимой формулы

$$\models_{\mathcal{I}} P \to \neg\neg P$$

От противного. Допустим, что $I, s_0 \not\models P \to \neg\neg P$. Тогда



Полученное противоречие свидетельствует о невозможности построения контрмодели для формулы $P \to \neg\neg P$.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Другие общезначимые формулы

Проверьте самостоятельно интуиционистскую общезначимость следующих формул

$$\models_{\mathcal{I}} \neg\neg\neg P \to \neg P$$

$$\models_{\mathcal{I}} (\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \& Q)$$

$$\models_{\mathcal{I}} \neg P \vee \neg\neg P$$

Интуиционистская логика

Некоторые особенности интуиционистской логики

Интуиционистская логика

Некоторые особенности интуиционистской логики

Теорема 1

$$\models_{\mathcal{I}} \varphi \implies \models_{\mathcal{C}} \varphi$$

Интуиционистская логика

Некоторые особенности интуиционистской логики

Теорема 1

$$\models_{\mathcal{I}} \varphi \implies \models_{\mathcal{C}} \varphi$$

Теорема 2 (Гливенко)

$$\models_{\mathcal{I}} \neg\neg\varphi \iff \models_{\mathcal{C}} \varphi$$

Интуиционистская логика

Некоторые особенности интуиционистской логики

Теорема 1

$\models_{\mathcal{I}} \varphi \implies \models_{\mathcal{C}} \varphi$

Теорема 2 (Гливенко)

$\models_{\mathcal{I}} \neg\neg\varphi \iff \models_{\mathcal{C}} \varphi$

Теорема 3 (дизъюнктивное свойство)

$\models_{\mathcal{I}} \varphi \vee \psi \iff \models_{\mathcal{I}} \varphi$ или $\models_{\mathcal{I}} \psi$

Интуиционистская логика

Некоторые особенности интуиционистской логики

Теорема 1

$\models_{\mathcal{I}} \varphi \implies \models_{\mathcal{C}} \varphi$

Теорема 2 (Гливенко)

$\models_{\mathcal{I}} \neg\neg\varphi \iff \models_{\mathcal{C}} \varphi$

Теорема 3 (дизъюнктивное свойство)

$\models_{\mathcal{I}} \varphi \vee \psi \iff \models_{\mathcal{I}} \varphi$ или $\models_{\mathcal{I}} \psi$

Теорема 4 (экзистенциальное свойство)

$$\models_{\mathcal{I}} \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi(x_1, \dots, x_n, y)$$

$$\iff$$

существует такой терм $t(x_1, \dots, x_n)$, что

$$\models_{\mathcal{I}} \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n, t(x_1, \dots, x_n))$$

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Некоторые особенности интуиционистской логики

Теорема 1

$\models_{\mathcal{I}} \varphi \implies \models_{\mathcal{C}} \varphi$

Теорема 2 (Гливенко)

$\models_{\mathcal{I}} \neg\neg\varphi \iff \models_{\mathcal{C}} \varphi$

Теорема 3 (дизъюнктивное свойство)

$\models_{\mathcal{I}} \varphi \vee \psi \iff \models_{\mathcal{I}} \varphi$ или $\models_{\mathcal{I}} \psi$

Теорема 4 (экзистенциальное свойство)

$$\models_{\mathcal{I}} \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$$
$$\iff$$
существует такой терм $t(x_1, \ldots, x_n)$, что
$$\models_{\mathcal{I}} \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n, t(x_1, \ldots, x_n))$$

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Некоторые особенности интуиционистской логики

Интуиционистская логика

Некоторые особенности интуиционистской логики

Задача

Покажите, что для любой формулы $\varphi(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ верно соотношение

$$\models_{\mathcal{C}} \varphi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \iff \models_{\mathcal{I}} \varphi(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

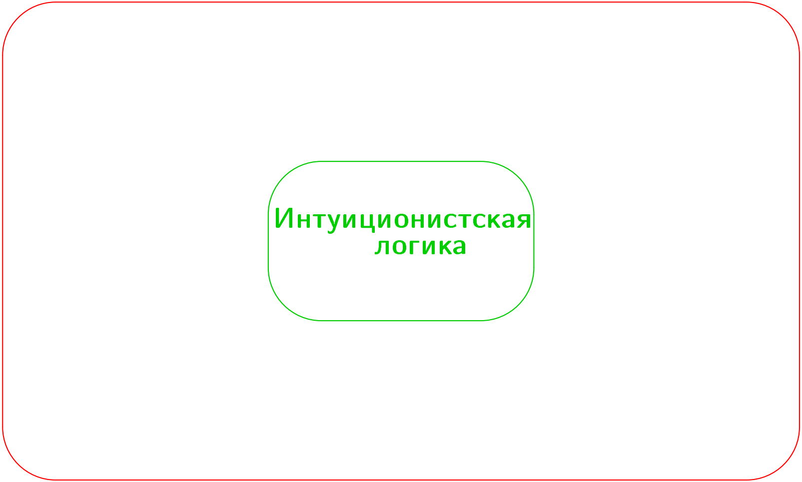
Интуиционистская логика

Многообразие интуиционистских логик

Классическая логика

Интуиционистская логика

Многообразие интуиционистских логик



Классическая логика

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Многообразие интуиционистских логик

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 18.