Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2018, весенний семестр

Лекция 9

Полнота резолютивного вывода

Стратегии резолютивного вывода

Вычислительные возможности метода резолюций

Полнота резолютивного вывода

Теорема полноты резолютивного вывода
Из любой противоречивой системы дизъюнктов резолютивно выводим пустой дизъюнкт

Схема доказательства:

- рассмотрим конечное противоречивое множество $\mathcal{G}$ основных примеров дизъюнктов исходной системы S
  (теорема Эрбрана: такое множество $\mathcal{G}$ существует)
- покажем, что из $\mathcal{G}$ резолютивно выводим $\square$
  (*лемма об основных дизъюнктах*)
- по выводу $\square$ из $\mathcal{G}$ построим вывод $\square$ из S
  (*леммы о подъёме*)

Полнота резолютивного вывода

Лемма об основных дизъюнктах

Из любой конечной противоречивой системы основных дизъюнктов резолютивно выводим пустой дизъюнкт

Доказательство леммы.

Покажем выводимость $\square$ из противоречивой системы S индукцией по числу $\|S\|$ различных атомов, содержащихся в дизъюнктах S

База индукции: $\|S\| = 0$

Система S противоречива $\Rightarrow S \neq \emptyset \Rightarrow S = \{\square\}$

Индуктивный переход: $\|S\| = N > 0$

Рассмотрим атом A, содержащийся в дизъюнктах S

Удалим из S все дизъюнкты вида $D \vee A \vee \neg A$ и склеим повторяющиеся литеры A, $\neg A$ в каждом дизъюнкте

Полученная система S^{red} противоречива, и если $\square$ выводим из S^{red}, то $\square$ выводим и из S (очевидно?)

Если $\|S^{red}\| < N$, то индуктивный переход доказан

Полнота резолютивного вывода

Доказательство леммы.

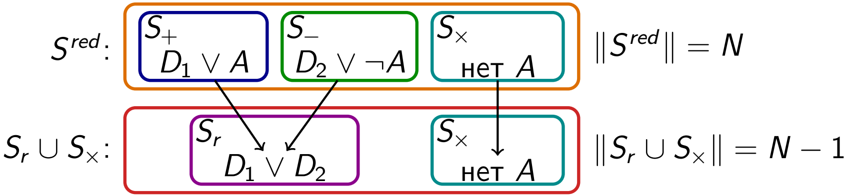
Индуктивный переход: S^{red} противоречива; $\|S^{red}\| = N > 0$

Разобьём S^{red} на три подсистемы:

1. $S_+ = \{D \mid D \in S^{red},\ D = D' \vee A\}$
2. $S_- = \{D \mid D \in S^{red},\ D = D' \vee \neg A\}$
3. $S_\times = S^{red} \setminus (S_+ \cup S_-)$

Построим все резольвенты по контрарной паре A, $\neg A$:

$$S_r = \{D_1 \vee D_2 \mid D_1 \vee A \in S_+,\ D_2 \vee \neg A \in S_-\}$$

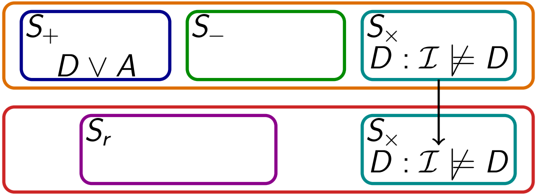


Если $\square$ выводим из $S_r \cup S_\times$, то $\square$ выводим и из S^{red}, а значит, достаточно показать, что $S_r \cup S_\times$ — противоречивая система

Полнота резолютивного вывода

Доказательство леммы.

Индуктивный переход: S^{red} противоречива; $\|S^{red}\| = N > 0$



Рассмотрим **произвольную** интерпретацию $\mathcal{I}$
Покажем, что $\mathcal{I} \not\models S_r \cup S_\times$

Теорема об $\mathcal{H}$-интерпретациях: **без ограничения общности** считаем, что $\mathcal{I}$ — $\mathcal{H}$-интерпретация

Положим $\mathcal{I} \models A$ (для $\mathcal{I} \not\models A$ всё аналогично)

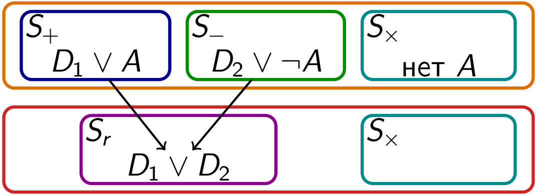
$\mathcal{I} \not\models S_+ \cup S_- \cup S_\times$ и $\mathcal{I} \models S_+ \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S_- \cup S_\times$

Случай 1: $\mathcal{I} \not\models S_\times$ Очевидно

Полнота резолютивного вывода

Доказательство леммы.

Индуктивный переход: S^{red} противоречива; $\|S^{red}\| = N > 0$



Случай 2: $\mathcal{I} \models A$, $\mathcal{I} \models S_\times$ и $\mathcal{I} \not\models S_-$

$\mathcal{I} \not\models D_2 \vee \neg A \Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_2$

Рассмотрим $\mathcal{H}$-интерпретацию $\mathcal{J} = \mathcal{I} \setminus \{A\}$

$\mathcal{J} \not\models S_+ \cup S_- \cup S_\times$, $\mathcal{J} \models S_-$ и $\mathcal{J} \models S_\times \Rightarrow \mathcal{J} \not\models S_+$

$\mathcal{J} \not\models D_1 \vee A \Rightarrow \mathcal{J} \not\models D_1 \Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_1$

$\mathcal{I} \not\models D_1$, $\mathcal{I} \not\models D_2 \Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_1 \vee D_2$ ▼

Полнота резолютивного вывода

Лемма о подъёме для правила резолюции

Пусть:

- D_1, D_2 — **дизъюнкты, и** $\mathrm{Var}_{D_1} \cap \mathrm{Var}_{D_2} = \emptyset$
- D_1', D_2' — **основные примеры дизъюнктов** D_1 **и** D_2 **соответственно**
- D' — **резольвента дизъюнктов** D_1', D_2'

Тогда существует резольвента D **дизъюнктов** D_1, D_2, **примером которой является дизъюнкт** D'

Где здесь "подъём"? Это подъём от частного случая к общему

$$
\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[dd, "\theta_1"'] \arrow[dr] & & D_2 \arrow[dd, "\theta_2"] \arrow[dl] \\
& D \arrow[dd, "\theta"] & \\
D_1' \arrow[dr] & & D_2' \arrow[dl] \\
& D' \arrow[uu, bend left] &
\end{tikzcd}
$$

Полнота резолютивного вывода

Доказательство леммы.

$$
\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[d, "\theta_1"'] & & D_2 \arrow[d, "\theta_2"] \\
D_1' \arrow[dr] & & D_2' \arrow[dl] \\
& D' &
\end{tikzcd}
$$

Полнота резолютивного вывода

Доказательство леммы.

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[d, "\theta_1"'] & & D_2 \arrow[d, "\theta_2"] \\
D_1'' \vee L \arrow[r] & D_1'' \vee D_2'' & D_2'' \vee \neg L \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Выделим контрарную пару, по которой строилась резольвента основных дизъюнктов

Полнота резолютивного вывода

Доказательство леммы.

$$\begin{tikzcd}
D_1''' \vee L_1 \arrow[d, "\theta_1"'] & & D_2''' \vee \neg L_2 \arrow[d, "\theta_2"] \\
D_1'''\theta_1 \vee L_1\theta_1 \arrow[r] & D_1'''\theta_1 \vee D_2'''\theta_2 & D_2'''\theta_2 \vee \neg L_2\theta_2 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Выделим контрарную пару, по которой строилась резольвента основных дизъюнктов, и литеры дизъюнктов D_1, D_2, порождающие эту пару

Без ограничения общности полагаем, что $\mathrm{Dom}_{\theta_1} \cap \mathrm{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Полнота резолютивного вывода

Доказательство леммы.

$$\begin{tikzcd}
D_1''' \lor L_1 \arrow[d, "\eta"'] & & D_2''' \lor \neg L_2 \arrow[d, "\eta"] \\
D_1'''\eta \lor L_1\eta \arrow[r] & D_1'''\eta \lor D_2'''\eta & D_2'''\eta \lor \neg L_2\eta \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Выделим контрарную пару, по которой строилась резольвента основных дизъюнктов, и литеры дизъюнктов D_1, D_2, порождающие эту пару

Без ограничения общности полагаем, что $\mathrm{Dom}_{\theta_1} \cap \mathrm{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда подстановка $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ — унификатор атомов L_1, L_2

Полнота резолютивного вывода

Доказательство леммы.

$$\begin{array}{ccccc}
D_1''' \vee L_1 & & & & D_2''' \vee \neg L_2 \\
\downarrow \eta & & & & \downarrow \eta \\
D_1'''\eta \vee L_1\eta & \longrightarrow & D_1'''\eta \vee D_2'''\eta & \longleftarrow & D_2'''\eta \vee \neg L_2\eta
\end{array}$$

Теорема об унификации:

существует наиболее общий унификатор μ атомов L_1, L_2

Полнота резолютивного вывода

Доказательство леммы.

$$
\begin{tikzcd}
D_1''' \vee L_1 \arrow[dr] \arrow[dd, "\eta"'] & & D_2''' \vee \neg L_2 \arrow[dl] \arrow[dd, "\eta"] \\
& D_1'''\mu \vee D_2'''\mu & \\
D_1'''\eta \vee L_1\eta \arrow[dr] & & D_2'''\eta \vee \neg L_2\eta \arrow[dl] \\
& D_1'''\eta \vee D_2'''\eta &
\end{tikzcd}
$$

Теорема об унификации:

существует наиболее общий унификатор μ атомов L_1, L_2

Тогда:

- $D_1'''\mu \vee D_2'''\mu$ — резольвента дизъюнктов D_1, D_2 по контрарной паре L_1, $\neg L_2$

Полнота резолютивного вывода

Доказательство леммы.

$$\begin{tikzcd}
D_1''' \vee L_1 \arrow[d, "\mu\theta"'] \arrow[r] & D_1'''\mu \vee D_2'''\mu \arrow[d, "\theta"] & D_2''' \vee \neg L_2 \arrow[l] \arrow[d, "\mu\theta"] \\
D_1'''\mu\theta \vee L_1\mu\theta \arrow[r] & (D_1'''\mu \vee D_2'''\mu)\theta & D_2'''\mu\theta \vee \neg L_2\mu\theta \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Теорема об унификации:

существует наиболее общий унификатор μ атомов L_1, L_2

Тогда:

- $D_1'''\mu \vee D_2'''\mu$ — резольвента дизъюнктов D_1, D_2 по контрарной паре L_1, $\neg L_2$
- существует подстановка θ, такая что $\eta = \mu\theta$ ▼

Полнота резолютивного вывода

Лемма о подъёме для правила склейки

Пусть:

- D_1' — основной пример дизъюнкта D_1
- D' — склейка дизъюнкта D_1'

Тогда существует склейка дизъюнкта D_1, основным примером которой является дизъюнкт D'

Доказательство леммы.

Доказывается аналогично лемме о подъёме для правила резолюции

Полнота резолютивного вывода

Теорема полноты резолютивного вывода
Из любой противоречивой системы дизъюнктов резолютивно выводим пустой дизъюнкт

Доказательство теоремы.

Пусть S — противоречивая система дизъюнктов

Теорема Эрбрана: существует конечное противоречивое множество $\mathcal{G}$ основных примеров дизъюнктов из S

Лемма об основных дизъюнктах: из $\mathcal{G}$ резолютивно выводим пустой дизъюнкт

Две леммы о подъёме: из S резолютивно выводим пустой дизъюнкт ▼

Стратегии резолютивного вывода

Как и в случае табличного вывода, резолютивный вывод может и не привести к $\square$, если дизъюнкты выводятся **произвольно**

Например: (переход от дизъюнктов к их вариантам опущен)

$$\left\{\begin{array}{ll} R(\mathbf{a},\mathbf{b}) & (F) \\ Q(x,x) & (R) \\ \neg Q(x,y) \vee \neg Q(y,z) \vee Q(x,z) & (T) \\ \neg R(x,y) \vee Q(x,y) & (L) \\ \neg Q(\mathbf{a},\mathbf{b}) & \end{array}\right\}$$

Резолютивный вывод из этой системы может выглядеть так:

$$\begin{tikzcd} \neg Q(\mathbf{a},\mathbf{b}) \arrow[d] & L \arrow[dl] \\ \neg R(\mathbf{a},\mathbf{b}) \arrow[d] & F \arrow[dl] \\ \square & \end{tikzcd}$$

Стратегии резолютивного вывода

Как и в случае табличного вывода, резолютивный вывод может и не привести к $\square$, если дизъюнкты выводятся **произвольно**

Например: (переход от дизъюнктов к их вариантам опущен)

$$\left\{\begin{array}{ll}
R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (F) \\
Q(x, x) & (R) \\
\neg Q(x, y) \vee \neg Q(y, z) \vee Q(x, z) & (T) \\
\neg R(x, y) \vee Q(x, y) & (L) \\
\neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &
\end{array}\right\}$$

Резолютивный вывод из этой системы может выглядеть так:

$$\begin{array}{cl}
\neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \\
\downarrow & \swarrow T \\
\neg Q(\mathbf{a}, y) \vee \neg Q(y, \mathbf{b}) & \\
\downarrow & \swarrow R \\
\neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \\
\downarrow & \\
\infty &
\end{array}$$

Стратегии резолютивного вывода

Как и в случае табличного вывода, резолютивный вывод может и не привести к $\Box$, если дизъюнкты выводятся **произвольно**

Например: (переход от дизъюнктов к их вариантам опущен)

$$\left\{\begin{array}{ll} R(\mathbf{a},\mathbf{b}) & (F) \\ Q(x,x) & (R) \\ \neg Q(x,y) \vee \neg Q(y,z) \vee Q(x,z) & (T) \\ \neg R(x,y) \vee Q(x,y) & (L) \\ \neg Q(\mathbf{a},\mathbf{b}) & \end{array}\right\}$$

Резолютивный вывод из этой системы может выглядеть так:

R $\quad \neg Q(x,y) \vee \neg Q(y,z) \vee Q(x,z) \quad$ T

$$\neg Q(x,y) \vee \neg Q(y,x)$$

$$\neg Q(x,y) \vee \neg Q(y,z) \vee$$
$$\neg Q(x,y') \vee \neg Q(y',z) \vee Q(x,z)$$

$$\neg Q(x,y) \vee \neg Q(y,z) \vee \neg Q(x,y') \vee \neg Q(y',z) \vee \neg Q(z,x)$$

$$\downarrow$$

$$\infty$$

Стратегии резолютивного вывода

От способа применения правил резолютивного вывода существенно зависит возможность вывести $\square$

Стратегия резолютивного вывода — это набор ограничений, согласно которым должны применяться правила резолюции и склейки при построении резолютивного вывода

Стратегия резолютивного вывода полна, если для любой противоречивой системы дизъюнктов существует успешный резолютивный вывод, удовлетворяющий всем ограничениям этой стратегии

Стратегии резолютивного вывода

Семантическая резолюция

Рассмотрим систему дизъюнктов S и интерпретацию $\mathcal{I}$

Разобьём S на две части, и будем их пополнять новыми дизъюнктами при построении вывода:

$$S_+^{\mathcal{I}} = \{D \mid \mathcal{I} \models D\}, \qquad S_-^{\mathcal{I}} = \{D \mid \mathcal{I} \not\models D\}$$

Правило $\mathcal{I}$-резолюции — это правило резолюции, применённое к одному дизъюнкту из $S_+^{\mathcal{I}}$ и одному дизъюнкту из $S_-^{\mathcal{I}}$

$\mathcal{I}$-резолютивный вывод — это резолютивный вывод, в котором вместо правила резолюции используется правило $\mathcal{I}$-резолюции

Стратегии резолютивного вывода

Пример $\mathcal{I}$-резолютивного вывода

Рассмотрим систему $S = \{\neg A \vee \neg B \vee C,\ A \vee C,\ B \vee C,\ \neg C\}$

и $\mathcal{H}$-интерпретацию $\mathcal{I} = \emptyset$

Тогда в $\mathcal{I}$-резолютивном выводе могут появиться такие дизъюнкты: (склейка опущена)

$$S_+^{\mathcal{I}}: \quad D_1 = \neg A \vee \neg B \vee C \qquad\qquad S_-^{\mathcal{I}}: \quad D_3 = A \vee C$$

$$D_2 = \neg C \qquad\qquad D_4 = B \vee C$$

$$D_5 = D_1 + D_3 = \neg B \vee C \qquad\qquad D_7 = D_2 + D_3 = A$$

$$D_6 = D_1 + D_4 = \neg A \vee C \qquad\qquad D_8 = D_2 + D_4 = B$$

$$D_9 = D_5 + D_8 = C$$

$$\square = D_9 + D_2$$

Стратегии резолютивного вывода

Теорема полноты семантической резолюции
Для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любой противоречивой системы дизъюнктов S верно следующее: из S $\mathcal{I}$-резолютивно выводим пустой дизъюнкт

Доказательство. Самостоятельно

Стратегии резолютивного вывода

Входная резолюция

Рассмотрим систему дизъюнктов S

Выберем в системе S дизъюнкт D_0

Будем строить резолютивный вывод так:

- начнём с варианта дизъюнкта D_0
- на каждом шаге построения будем добавлять в вывод резольвенту D_{i+1} последнего полученного дизъюнкта D_i и какого-либо дизъюнкта из S

В результате будет построен входной резолютивный вывод, инициированный дизъюнктом D_0

Входной резолютивный вывод не является полным (очевидно?)

Стратегии резолютивного вывода

Пример входного резолютивного вывода

$$S = \{\neg A \vee \neg B \vee C,\ A \vee C,\ B \vee C,\ \neg C\}$$

Входной резолютивный вывод из S, инициированный дизъюнктом $\neg C$, может выглядеть так:

$$\begin{tikzcd}
\neg C \arrow[d] & \neg A \vee \neg B \vee C \arrow[dl] \\
\neg A \vee \neg B \arrow[d] & A \vee C \arrow[dl] \\
\neg B \vee C \arrow[d] & \neg C \arrow[dl] \\
\neg B \arrow[d] & B \vee C \arrow[dl] \\
C \arrow[d] & \neg C \arrow[dl] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Вычислительные возможности метода резолюций

Метод резолюций пригоден для решения следующих задач:

I. Проверка общезначимости формул

Дано: замкнутая формула φ

Узнать: $\overset{?}{\models} \varphi$

Решение:

- перейти к отрицанию формулы
- построить равносильную ПНФ
- построить равновыполнимую ССФ
- перейти к системе дизъюнктов
- резолютивно вывести $\square$

Вычислительные возможности метода резолюций

Метод резолюций пригоден для решения следующих задач:

II. Проверка логического следования

Дано:

- **база знаний**: набор замкнутых формул $\varphi_1, \dots, \varphi_k$
- **запрос**: замкнутая формула φ

Узнать: следует ли запрос из базы знаний

Решение:

$$\varphi_1, \dots, \varphi_k \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \varphi_k \to \varphi$$

Задача сведена к I

Вычислительные возможности метода резолюций

Метод резолюций пригоден для решения следующих задач:

III. Проверка логического следования (частный случай)

Дано:

- **база знаний**: набор дизъюнктов $\varphi_1, \dots, \varphi_k$
- **запрос**: $\exists \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, где φ — атом

Узнать: следует ли запрос из базы знаний

Если база знаний и запрос устроены просто, то схема решения задачи существенно упрощается:

$$\models \varphi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \varphi_k \to \exists \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \varphi$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{из } \{\varphi_1, \dots, \varphi_k, \neg\varphi\} \text{ резолютивно выводим } \square$$

Вычислительные возможности метода резолюций

Метод резолюций пригоден для решения следующих задач:

IV. Проверка наличия логически следующих примеров

Дано:

- **база знаний**: набор дизъюнктов $\varphi_1, \dots, \varphi_k$
- **запрос**: атом $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Узнать: верно ли, что хотя бы один основной пример запроса логически следует из базы знаний

Это переформулировка задачи III

Вычислительные возможности метода резолюций

Метод резолюций пригоден для решения следующих задач:

V. Вычисление логически следующих примеров

Дано:

- **база знаний**: набор дизъюнктов $\varphi_1, \dots, \varphi_k$
- **запрос**: атом $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Узнать: какие основные примеры запроса логически следуют из базы знаний

Решение:

- решить задачу IV для тех же входных данных
- вычислить ответ к задаче по унификаторам, использованным при построении резолютивного вывода

Вычислительные возможности метода резолюций

Пример:

- Даша любит Сашу $\varphi_1 : \mathrm{L}(\textbf{Даша}, \textbf{Саша})$
- Саша любит пиво $\varphi_2 : \mathrm{L}(\textbf{Саша}, \textbf{пиво})$
- Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он
  $\varphi_3 : \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \textbf{пиво})$
  $\varphi_4 : \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\ (\neg \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{x}))$

Кто любит Дашу?

$$\varphi_0 : \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Даша})$$

Система дизъюнктов:

$$S = \{\neg\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$$

Попробуем построить вывод $\square$ из S

Вычислительные возможности метода резолюций

$$\neg L(z, \textbf{Даша})$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\textbf{Паша}, x_1)$$

$$\theta_1 = \{z/\textbf{Паша}, \ldots\}$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, y) \vee \neg L(\textbf{Даша}, y)$$

$$L(\textbf{Даша}, \textbf{Саша})$$

$$\theta_2$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, \textbf{Саша})$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, y_2) \vee \neg L(x_2, y_2) \vee L(\textbf{Паша}, x_2)$$

$$\theta_3$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, y) \vee \neg L(\textbf{Саша}, y)$$

$$L(\textbf{Саша}, \textbf{пиво})$$

$$\theta_4$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, \textbf{пиво})$$

$$L(\textbf{Паша}, \textbf{пиво})$$

$$\theta_5$$

$$\square$$

Вычислительные возможности метода резолюций

Система дизъюнктов S **противоречива**

Значит, кто-то любит Дашу

Но кто же это?

Нами построен входной резолютивный вывод $\square$ из S, инициированный дизъюнктом $\neg\varphi_0$: $\neg \mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Даша})$, и вычислена последовательность унификаторов $\theta_1, \ldots, \theta_5$, используемых в правиле резолюции

Можно легко убедиться, что аналогичный вывод $\square$ можно построить, начав с дизъюнкта $\neg\varphi_0\theta_1 \ldots \theta_5$: $\neg \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \textbf{Даша})$

Вычислительные возможности метода резолюций

$$\neg L(\textbf{Паша}, \textbf{Даша})$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\textbf{Паша}, x_1)$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, y) \vee \neg L(\textbf{Даша}, y)$$

$$L(\textbf{Даша}, \textbf{Саша})$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, \textbf{Саша})$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, y_2) \vee \neg L(x_2, y_2) \vee L(\textbf{Паша}, x_2)$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, y) \vee \neg L(\textbf{Саша}, y)$$

$$L(\textbf{Саша}, \textbf{пиво})$$

$$\neg L(\textbf{Паша}, \textbf{пиво})$$

$$L(\textbf{Паша}, \textbf{пиво})$$

$$\square$$

Вычислительные возможности метода резолюций

Значит, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \textbf{Даша})$, то есть

Дашу любит (*как минимум*) Паша

Вопросы для самостоятельного размышления:

Кто любит пиво?

Кого любит пиво?

Вычислительные возможности метода резолюций

Чтобы резолютивный вывод мог служить средством вычисления, он должен быть **конструктивным**: вместе со способом получения явного противоречия ($\square$) описывать все примеры запроса, приводящие к этому противоречию

Входной резолютивный вывод, инициированный запросом и только один раз использующий запрос для построения резольвент, конструктивен

Не для всех задач можно построить такой вывод, **например:**

Если вечером будет дождь,
то мы пойдём в кино,
а если дождя не будет, то в парк

Где мы проведём вечер?

Вычислительные возможности метода резолюций

Где мы проведём вечер?

Запишем задачу на языке логики предикатов

- константы: **кино**, **парк**
- R = "вечером будет дождь"
- $\mathrm{E(x)}$ = "вечером мы пойдём в x"

База знаний: $\{\mathrm{R} \to \mathrm{E}(\textbf{кино}),\ \neg\mathrm{R} \to \mathrm{E}(\textbf{парк})\}$

Запрос: $\mathrm{E(x)}$

Получаем такую систему дизъюнктов:

$$S = \{\neg\mathrm{R} \vee \mathrm{E}(\textbf{кино}),\ \mathrm{R} \vee \mathrm{E}(\textbf{парк}),\ \neg\mathrm{E(x)}\}$$

Попробуем построить резолютивный вывод $\square$ из S

Вычислительные возможности метода резолюций

Где мы проведём вечер?

$$
\begin{tikzcd}
\neg R \lor E(\textbf{кино})\{x/\textbf{кино}\} \arrow[dr] & & \neg E(x) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \{x/\textbf{парк}\}\ R \lor E(\textbf{парк}) \arrow[dl] \\
& \neg R \arrow[dr] & & R \arrow[dl] & \\
& & \square & &
\end{tikzcd}
$$

успех?

Результат: $R \to E(\textbf{кино}),\ \neg R \to E(\textbf{парк}) \models \exists x\, E(x)$

Но куда же мы пойдём?

Всё, что мы можем сказать, — это: $x \in \{\textbf{кино}, \textbf{парк}\}$

Мы смогли **доказать**, что пойдём куда-нибудь вечером, но **не вычислили**, куда именно

Вычислительные возможности метода резолюций

Дизъюнкты базы знаний в задаче "о пиве" могут быть записаны в виде *позитивной импликации*

[если <атом> и <атом> и ... и <атом>, то] <атом>:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{L}(\textbf{Даша}, \textbf{Саша}) \\
\mathrm{L}(\textbf{Саша}, \textbf{пиво}) \\
\mathrm{L}(\textbf{Паша}, \textbf{пиво}) \\
\mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{y})\,\&\,\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \rightarrow \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{x})
\end{array}
$$

В базе знаний задачи "о планах на вечер" содержится дизъюнкт, состоящий из двух положительных литер:

$$\mathrm{R} \vee \mathrm{E}(\textbf{парк})$$

Такой дизъюнкт нельзя записать в виде позитивной импликации

Вычислительные возможности метода резолюций

Хорновский дизъюнкт — это дизъюнкт, содержащий **не более одной положительной литеры**

Правило — это хорновский дизъюнкт, содержащий **ровно одну положительную литеру**

Утверждение. $\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_k \vee B \quad \approx \quad A_1 \,\&\, \dots \,\&\, A_k \rightarrow B$

Запрос — это хорновский дизъюнкт, не содержащий **ни одной положительной литеры**

Утверждение. $\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_k \quad \approx \quad \neg(B_1 \,\&\, \dots \,\&\, B_k)$

Утверждение. **Не более одной литеры правила может образовывать контрарную пару с литерой запроса**

Утверждение. **Ни к какой паре запросов нельзя применить правило резолюции**

Утверждение. **Резольвента запроса и правила является запросом**

Вычислительные возможности метода резолюций

Правило $A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_k \to B$ — это описание того,

- из каких фактов $A_1, \ldots, A_k$ необходимо следует факт B,
- как решение задачи B сводится к решению задач $A_1, \ldots, A_k$,
- $\ldots$

Запрос $\neg(B_1 \,\&\, \ldots \,\&\, B_k)$ — это

- набор (*взаимосвязанных*) фактов $B_1, \ldots, B_k$, справедливость которых требуется проверить
- набор задач, которые требуется решить
- $\ldots$

Вычислительные возможности метода резолюций

Итоги:

- входной резолютивный вывод из системы хорновских дизъюнктов, инициированный запросом, конструктивен и строится эффективно
- в виде хорновскив дизъюнктов естественным образом формализуются позитивные причинно-следственные связи между отношениями (способы сведения сложных задач к простым)

Выразительность и простота систем дизъюнктов и выводов такого вида достаточны, чтобы они использовались для постановки и решения **вычислительных** логических задач — например, в логическом программировании, средствах автоматического доказательства теорем, логических средствах работы с базами данных, ...