Магистратура факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции по курсу «Дискретные модели».
Лектор – доцент Селезнева Светлана Николаевна

1 Графы. Простейшие свойства графов.

Графом G называется пара множеств (V, E), где V — множество вершин, E — множество неупорядоченных пар различных вершин, называемых ребрами. Если $e = (v, w) \in E$, то ребро e соединяет вершины v и w, v и w концы ребра e, при этом вершины v и w — смежны. Граф с n вершинами, в котором любые две его различные вершины смежны, называется полным графом K_n, граф K_3 называется треугольником. Граф называется двудольным, если его вершины можно разбить на две доли так, что смежны только вершины из разных долей. Двудольный граф с долями из n и m вершин, в котором смежны любые две вершины из разных долей, называется полным двудольным графом $K_{n,m}$.

Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются изоморфными, если найдется такое взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, что для любой пары вершин $v, w \in V_1$ $(v, w) \in E_1$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$.

Граф $H = (V', E')$ называется подграфом графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Если $v \in V$, то граф $G - v$ получается из графа G удалением вершины v и всех ребер, содержащих эту вершину. Если $e \in E$, то граф $G - e$ получается из графа G удалением ребра e. Граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$ называется дополнительным к графу $G = (V, E)$, если $\bar{E}$ состоит из всех тех ребер, которых нет в E, т.е. $\bar{E} = \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w, (v, w) \notin E\}$.

Степенью $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в графе $G = (V, E)$ называется число смежных с ней вершин. Если $d_G(v) = 0$, то вершина v называется изолированной, если $d_G(v) = 1$, то вершина v называется висячей. Пусть $\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ и $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ соответственно обозначают наименьшую и наибольшую степени вершин в графе G.

Предложение 1.1 (формула Эйлера для степеней вершин)**.** 1. *Для каждого графа $G = (V, E)$ справедливо равенство $\sum\limits_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$.*

2. *В каждом графе число вершин, имеющих нечетную степень, четно.*

Маршрутом длины m в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_m$, в которой $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$ при всех $i = 1, \ldots, m$. Маршрут замкнут, если $v_m = v_0$. Маршрут называется цепью, если все его ребра различны; замкнутая цепь называется циклом. Цепь называется простой цепью, если все ее вершины попарно различны. Цикл $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0$ называется простым циклом, если вершины $v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$ попарно различны.

Предложение 1.2. *Из любого замкнутого маршрута нечетной длины m, $m \geq 3$, можно выделить простой цикл.*

Предложение 1.3. *В любом графе G найдутся простая цепь с длиной, не меньшей $\delta(G) - 1$, и простой цикл с длиной, не меньшей $\delta(G)$.*

Граф называется связным, если любая пара его вершин соединена цепью. Связный подграф, который нельзя расширить добавлением вершин или ребер исходного графа так, чтобы он остался связным, называется компонентой связности.

Предложение 1.4. *Если граф G с p вершинами, q ребрами и s компонентами связности, то $s \geq p - q$, если при этом в графе G отсутствуют циклы, то $s = p - q$.*

Предложение 1.5. 1. *Если к связному графу добавить ребро, соединяющее его несмежные вершины, то появится цикл.*

2. *Если в связном графе удалить ребро из цикла, то останется связный граф.*

Предложение 1.6. *Любой граф $G = (V, E)$ с $\delta(G) \geq \frac{|V|-1}{2}$ связен.*

Связный граф без циклов называется деревом.

Предложение 1.7. 1. *Любое дерево с $p \geq 2$ вершинами содержит хотя бы две висячие вершины.*

2. *В любом дереве с p вершинами и q ребрами верно $q = p - 1$.*

3. *В любом дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью.*

4. *Если к дереву добавить ребро, соединяющее его несмежные вершины, то появится ровно один цикл.*

5. *Если из дерева удалить ребро, то останется граф с двумя компонентами свяности.*

2 Остовные деревья в графах.

Остовным деревом связного графа называется его пограф на всех вершинах, являющийся деревом.

Теорема 2.1. *В каждом связном графе $G = (V, E)$ найдется остовное дерево.*

Доказательство. 1-й способ. Если в графе G нет циклов, то он является своим остовным деревом. Иначе рассмотрим в графе G цикл, и пусть e — ребро из этого цикла. Повторим рассуждения для графа $G - e$, который также является связным. На каждом шаге мы удаляем хотя бы один цикл графа G, но циклов конечное число. Поэтому через конечное число шагов получим дерево, которое и есть остовное дерево графа G.

2-й способ. Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$. *Шаг 1.* Положим $D_1 = (\{v_1\}, \emptyset)$. *Шаг* $j+1$ $(j < p-1)$. Пусть на шаге j построено дерево $D_j = (V_j, E_j)$, где $|V_j| = j$. Граф G — связный, поэтому найдется ребро $e = (u, w) \in E$, такое что $u \in V_j$, $w \in V \setminus V_j$. Положим $D_{j+1} = (V_j \cup \{w\}, E_j \cup e)$. Дерево D_p — остовное. □

Теорема 2.2. *В полном помеченном графе K_n найдется n^{n-2} остовных деревьев.*

Доказательство. Пусть $K_n = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Для каждого остовного дерева D_1 графа K_n построим его код $k(D_1) = (j_1, \ldots, j_{n-2})$. Пусть i_1 — это висячая вершина с наименьшим номером в дереве D_1. Она смежна с единственной вершиной j_1. Повторим рассуждения для дерева $D_2 = D_1 - i_1$ и т.д. Останавливаемся, когда получим дерево D_{n-1}, являющееся ребром.

Пусть получен код $k(D_1) = (j_1, \ldots, j_{n-2})$. Как по нему восстановить дерево D_1? Заметим, что если i не содержится в коде $k(D_1)$, то i — висячая вершина дерева D. Пусть

$V_1 = V$. Выбираем наименьший номер i_1 из V_1, не содержащийся в $k(D_1)$. Соединяем вершины i_1 и j_1. Пусть $V_2 = V_1 \setminus \{i_1\}$. Повторяем рассуждения для множества V_2 и кода $(j_2, \ldots, j_{n-2})$. Заметим, что множество V_{n-1} содержит ровно две вершины. Их нужно соединить ребром. Получим дерево D_1.

Число остовных деревьев в графе K_n совпадает с числом кодов $(j_1, \ldots, j_{n-2})$, где j_1, $\ldots$, $j_{n-2} \in V$. Значит, число остовных деревьев равно n^{n-2}. □

Теорема 2.3. *Пусть D_1 и D^* – два остовных дерева связного графа G с m и n висячими вершинами соответственно ($m < n$). Тогда для каждого числа k, $m < k < n$, в графе G найдется остовное дерево с k висячими вершинами.*

Доказательство. Пусть $D_1 = (V, E_1)$, $D^* = (V, E^*)$, и $e_1^* \in E^* \setminus E_1$. Рассмотрим граф $G_1 = D_1 + e_1^*$. В нем есть единственный цикл C_1. В этом цикле выберем ребро $e_1 \notin D^*$, и пусть $D_2 = G_1 - e_1$. Граф D_2 – дерево, повторим для него рассуждения и т.д. В итоге получим последовательность остовных деревьев $D_1, D_2, \ldots, D^*$. Отметим, что число висячих вершин в соседних деревьях D_j и D_{j+1} отличается не более, чем на 2.

Пусть для некоторого $k, m < k < n$, в последовательности остовных деревьев нет дерева с k висячими вершинами. Значит, найдутся два соседних дерева D_j и D_{j+1}, такие, что в дереве D_j — $(k-1)$ висячих вершин, а в дереве D_{j+1} — $(k+1)$ висячих вершин.

Рассмотрим цикл C_j в графе G_j. Концы ребра e_j^* имеют степень больше двух, а концы ребра e_j имеют степень два в цикле C_j. Значит, в цикле C_j найдется такое ребро e, что один его конец имеет стень два, а другой его конец имеет степень, большую двух.

Тогда дерево $D = G_j - e$ – остовное дерево с k вершинами в графе G. □

Сколько висячих вершин может быть в остовном дереве графа G?

Предложение 2.1. *В любом связном графе G найдется остовное дерево с не менее, чем $\Delta(G)$ висячими вершинами.*

Доказательство. Будем строить остовное дерево так: сначала выберем такую вершину $v \in V$, что $d_G(v) = \Delta(G)$, вместе со всеми ребрами, которые ее содержат, затем будем добавлять к этой звезде ребра графа G так, чтобы не появились циклы. В итоге построим остовное дерево, в котором будет не менее, чем $\Delta(G)$ висячих вершин. □

Теорема 2.4. *В связном графе $G = (V, E)$ с $\delta(G) \geq 3$ найдется остовное дерево с не менее, чем $|V|/4$ висячими вершинами.*

Доказательство. Опишем алгоритм построения такого остовного дерева. Пусть дерево D – это подграф графа G. Висячую вершину дерева D назовем устойчивой, если все смежные ей вершины принадлежат также дереву D. Обозначим через $u(D)$ число его висячих вершин дерева D, через $s(D)$ – число его устойчивых висячих вершин и через $v(D)$ — число всех его вершин. Положим $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$.

Остовное дерево будем строить по индукции. *Базис индукции*: выберем в графе G произвольную вершину v. Пусть D_1 – это эта вершина вместе со всеми исходящими из нее ребрами и их вторыми концами. Тогда $\alpha(D_1) \geq 3d_G(v)/4 - (d_G(v)+1)/4 \geq 1/2$, т.к. $d_G(v) \geq 3$.

Индуктивный переход. Пусть уже построено дерево $D_j = (V_j, E_j)$, и $W_j = V \setminus V_j$.

1. Если в дереве D_j есть невисячая вершина v, смежная с некоторой вершиной $w \in W_j$, то пусть $D_{j+1} = D_j + (v, w)$. Тогда

$$\alpha(D_{j+1}) - \alpha(D_j) \geq 3/4 - 1/4 = 1/2.$$

2. Иначе если в дереве D_j есть вершина v, смежная с хотя бы с двумя вершинами $w_1, w_2 \in W_j$, то пусть $D_{j+1} = D_j + (v, w_1) + (v, w_2)$. Тогда

$$\alpha(D_{j+1}) - \alpha(D_j) \geq 3/4 - 2 \cdot (1/4) = 1/4.$$

3. Иначе если в множестве W_j есть вершина w, смежная с какой-то вершиной v дерева D_j и хотя бы двумя вершинами $w_1, w_2 \in W_j$, то пусть $D_{j+1} = D_j + (v, w) + (w, w_1) + (w, w_2)$. Тогда

$$\alpha(D_{j+1}) - \alpha(D_j) \geq 3/4 - 3 \cdot (1/4) = 0.$$

4. Иначе в множестве W_j есть вершина w, смежная с вершинами дерева D_j. Т.к. п.3 не выполняется, то вершина w смежна не более, чем с одной вершиной из множества W_j. Но $d_G(v) \geq 3$, поэтому вершина w смежна хотя бы с двумя вершинами $v, v_1 \in V_j$. Пусть $D_{j+1} = D_j + (v, w)$. Т.к. п.п.1-2 не выполняются, вершина v_1 – висячая в дереве D_j и смежна рово с одной вершиной из множества W_j, а именно, с вершиной w. Поэтому в дереве D_{j+1} висячая вершина v_1 – устойчивая. Тогда

$$\alpha(D_{j+1}) - \alpha(D_j) \geq 1/4 - 1/4 = 0.$$

5. Если п.п.1-4 нельзя применить, то остовное дерево D построено.

В остовном дереве D все висячие вершины устойчивые. Поэтому

$$\alpha(D) = u(D) - v(D)/4, \text{ или } u(D) = v(G)/4 + \alpha(D).$$

Но $\alpha(D) \geq \alpha(D_1)$, т.к. на каждом шаге построения мы только увеличивали этот параметр. Отсюда получаем

$$u(D) \geq |V|/4.$$

□

3 Раскраски графов. Хроматическое число графа.

Раскраской графа $G = (V, E)$ в k цветов называется отображение $\rho : V \to \{1, 2, \dots, k\}$, при котором из $(v, w) \in E$ следует $\rho(v) \neq \rho(w)$ (т.е. любые смежные вершины окрашены в разные цвета). Наименьшее возможное число цветов, в которое можно окрасить вершины графа G, называется его хроматическим числом и обозначается $\chi(G)$. Граф G называется двуцветным, если $\chi(G) = 2$.

Теорема 3.1 (Кёнига). *Граф $G = (V, E)$ является двуцветным тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.*

Доказательство. Если в графе G есть цикл нечетной длины, то вершины этого цикла в два цвета не раскрасить. Пусть теперь в графе G нет циклов нечетной длины. Будем считать, что G – связный граф, иначе можно провести рассуждения для каждой его компоненты связности. Построим в графе G его остовное дерево D. В любом дереве для каждой пары вершин $v, w \in V$ существует ровно одна цепь из v в w. Пусть $v \in V$ – какая-то вершина. Рассмотрим следующую раскраску ρ вершин $w \in V$ дерева D в два цвета: $\rho(w) = 1$ (соответственно, $\rho(w) = 2$), если длина единственной цепи из v в w четна (соответственно, нечетна). Покажем, что при такой раскраске в графе G не окажется ребер, оба конца которых окрашены в один и тот же цвет. В самом деле, предположим противное: пусть $(u, w) \in E$ и $\rho(u) = \rho(w)$. Тогда рассмотрим в графе G замкнутый маршрут M: сначала цепь из u в v в дереве D, затем цепь из v в w в дереве D и, наконец, по ребру (w, u) в u. Длина этого маршрута нечетна, т.к. у длин цепей из u в v и из v в w в дереве D одинаковая четность. Значит, из указанного замкнутого маршрута M можно выделить цикл нечетной длины. Противоречие. $\square$

Теорема 3.2. *Для произвольного графа* $G = (V, E)$ *верно* $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу вершин $n = |V|$.

Базис индукции $n = 1$ верен. *Индуктивный переход*: пусть утверждение верно для всех графов с n вершинами. Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с $n + 1$ вершинами. Пусть $v \in V$, и рассмотрим граф $G' = G - v$. Для графа G' верно предположение индукции, т.е. $\chi(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1$. Перенесем раскраску вершин графа G' в $\chi(G')$ цветов на вершины графа G. При этом вершина v останется неокрашенной. Окрасим вершину v в цвет, который не встречается среди цветов вершин, смежных с ней. Тогда $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$, т.к. вершина v смежна не более, чем с $\Delta(G)$ вершинами. $\square$

Теорема 3.3. *Если в графе* $G = (V, E)$ *с* $\Delta(G) \geq 3$ *найдется вершина* $v \in V$*, для которой* $d_G(v) < \Delta(G)$*, то* $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу вершин $n = |V|$. *Базис индукции* верен. *Индуктивный переход*: пусть утверждение верно для всех графов с n вершинами. Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с $n + 1$ вершинами. Выберем $v \in V$ с $d_G(v) < \Delta(G)$. Положим $G' = G - v$. Очевидно, что $\Delta(G') \leq \Delta(G)$. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1. Если $\Delta(G') \geq 3$ и в G' найдется такая вершина $u \in V \setminus \{v\}$, что $d_G(v) < \Delta(G')$, то для графа G' верно предположение индукции, и $\chi(G') \leq \Delta(G')$. Перенесем раскраску вершин графа G' в $\chi(G')$ цветов на вершины графа G. При этом вершина v останется неокрашенной. Окрасим вершину v в цвет, который не встречается среди цветов вершин, смежных с ней. Тогда $\chi(G) \leq \Delta(G)$, т.к. вершина v смежна не более, чем с $\Delta(G) - 1$ вершинами.

Случай 2. Если $\Delta(G') = 2$ или в графе G' для каждой вершины $u \in V \setminus \{v\}$, верно $d_G(v) = \Delta(G')$, то $\Delta(G') \leq \Delta(G)-1$. По предыдущей теореме раскрасим вершины графа G' в $\Delta(G')$+1 цветов. Перенесем раскраску вершин графа G' в $\chi(G')$ цветов на вершины графа G. При этом вершина v останется неокрашенной. Окрасим вершину v в цвет, который не встречается среди цветов вершин, смежных с ней. Тогда $\chi(G) \leq \Delta(G)$, т.к. $\chi(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G)$ и вершина v смежна не более, чем с $\Delta(G) - 1$ вершинами. $\square$

Теорема 3.4 (Брукса)**.** *Если граф* G *не является полным графом или циклом с нечетной длиной, то* $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

4 Наследственные свойства графов. Экстремальные графы.

Свойство P графов называется наследственным, если из его выполнения для графа G следует его выполнение и для любого подграфа графа G. Пусть $P(n)$ обозначает наибольшее число ребер в графах с наследственным свойством P, содержащих n вершин.

Теорема 4.1. *Если P — наследственное свойство графов, то $P(n) \leq \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1)$, $n \geq 3$.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — граф с наследственным свойством P, $|V| \geq 3$, и $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Тогда каждый из графов $G_i = G - v_i$ также с наследственным свойством P. Если $G_i = (V_i, E_i)$, то

$$|E| - d_G(v_i) = |E_i| \leq P(n-1)$$

для всех $i = 1, \ldots, n$. Сложим все неравенства:

$$n \cdot |E| - \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) \leq n \cdot P(n-1).$$

По формуле Эйлера для степеней вершин $\sum\limits_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2 \cdot |E|$, откуда

$$|E| \leq \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1).$$

Неравенство выполняется для любого графа с наследственным свойством P, а значит, и для графа $G = (V, E)$ с $|E| = P(n)$. □

Граф $G = (V, E)$ называется планарным, если его можно нарисовать на плоскости без пересечений ребер, при этом вершинам соответствуют точки плоскости, а ребрам — линии, соединяющие соответствующие точки. Такое изображение планарного графа называется его укладкой на плоскости. Области плоскости, определяемые укладкой планарного графа, называются его гранями, неограниченная область называется внешней гранью.

Теорема 4.2 (формула Эйлера для планарных графов)**.** *Если $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами, то для для каждой его укладки на плоскости верно равенство $p - q + r = 2$, где r — число граней в этой укладке.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по q при заданном p. *Базис индукции*: если $q = p - 1$, то G — дерево. Каждое дерево — планарный граф с одной гранью, поэтому формула верна. *Индуктивный переход*: пусть в графе G $q \geq p$ ребер. Тогда в G есть хотя бы один цикл, пусть e — ребро из какого-то его цикла. Граф $G' = G - e$ — связный и планарный с p вершинами и $(q - 1)$ ребрами, и его укладка на плоскости содержит $(r - 1)$ граней. Для графа G' верно предположение индукции, т.е. $p - (q - 1) + (r - 1) = 2$, откуда $p - q + r = 2$. □

Отметим, что планарность графов является наследственным свойством.

Теорема 4.3. *Наибольшее число ребер в связном планарном графе с p, $p \geq 3$, вершинами равно $3p - 6$.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами. Рассмотрим укладку G на плоскости, и пусть q_i — число ребер в цикле, ограничивающем i-ю грань в этой укладке, $i = 1, \ldots, r$. Тогда $\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т.к. каждое ребро разделяет две грани. Наименьшее число ребер в цикле равно трем, поэтому $3r \leq 2q$, или $r \leq \frac{2}{3}q$. По теореме 4.2 получаем $r = q - p + 2$, откуда $q \leq 3p - 6$.

Эта оценка достигается на графах, которые можно построить индуктивно. При $p = 3$ подходит граф $G_p = K_3$. Пусть уже построен связный планарный граф G_p с p вершинами и $3p - 6$ ребрами, каждая грань которого ограничена треугольником. Тогда граф G_{p+1} получается из G_p добавлением новой вершины внутри какой-то грани и ребер, соединяющих эту вершину с тремя вершинами этой грани. □

Следствие 4.3.1. *Наибольшее число граней в укладке связного планарного графа с p, $p \geq 3$, вершинами равно $2p - 4$.*

Пусть $ex(p, K_n)$ обозначает наибольшее число ребер в графах с p вершинами, не содержащих подграф K_n. Отметим, что отсутствие в графах подграфа K_n является наследственным свойством.

Теорема 4.4. *Справедливо равенство $ex(p, K_3) = \lfloor p^2/4 \rfloor$, $p \geq 1$.*

Доказательство. Доказательство верхней оценки проведем индукцией по числу вершин p. Сначала рассмотрим случай четного p. *Базис индукции* $p = 2$ верен. *Индуктивный переход*: пусть утверждение верно для всех графов с $p = 2s$ вершинами. Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с $p + 2$ вершинами. Выберем в графе G две смежные вершины $v, w \in V$ и рассмотрим граф $G' = G - \{v, w\}$. Граф $G' = (V', E')$ не содержит треугольников и для него верно предположение индукции, т.е. $|E'| \leq s^2$. Тогда

$$|E| \leq s^2 + (d_G(v) - 1) + (d_G(w) - 1) + 1,$$

где единица в сумме соответствует ребру $(v, w) \in E$.

Граф G' — без треугольников, поэтому вершины v и w не могут быть смежны с какой-то вершиной $u \in V'$, откуда $(d_G(v) - 1) + (d_G(w) - 1) \leq p$. Следовательно,

$$|E| \leq s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2.$$

Случай нечетного p доказывается аналогично.

Графы без треугольников $K_{s,s}$ и $K_{s,(s+1)}$ при четном $p = 2s$ и нечетном $p = 2s + 1$ соответственно показывает достижимость верхней оценки. □

Теорема 4.5 (Турана). *При $p \geq 1$, $n \geq 3$ справедливо равенство $ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + C_r^2$, где r — остаток от деления p на $n - 1$.*

5 Числа Рамсея.

Пусть $R(m, n)$ такое наименьшее число x, что для любого графа G с x вершинами верно, что либо в G есть подграф K_m, либо в $\bar{G}$ есть подграф K_n. Раскраской ребер графа $G = (V, E)$ в два цвета называется отображение $\rho : E \to \{1, 2\}$. Число $R(m, n)$ является таким наименьшим числом x, что при любой раскраске ребер полного графа K_x в два цвета либо в нем найдется подграф K_m с ребрами цвета 1, либо в нем найдется подграф K_n с ребрами цвета 2. Отметим, что $R(1,n) = R(m,1) = 1$ и $R(m,n) = R(n,m)$.

Теорема 5.1. *При $m, n \geq 2$ справедливо неравенство $R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1)$.*

Доказательство. Положим $x = R(m-1,n) + R(m,n-1)$ и рассмотрим произвольную раскраску ребер полного графа K_x в цвета 1 и 2. Из произвольной вершины v графа K_x исходит либо $R(m-1,n)$ ребер цвета 1, либо $R(m,n-1)$ ребер цвета 2. Случаи аналогичны, рассмотрим первый из них. Пусть V — множество из $y = R(m-1,n)$ концов этих ребер. Множество V вместе с соединяющими их ребрами образуют полный подграф K_y графа K_x. По определению числа $R(m-1,n)$ в графе K_y найдется либо полный подграф K_n с ребрами цвета 2, либо полный подграф K_{m-1} с ребрами цвета 1. В первом случае этот полный подграф K_n с ребрами цвета 2 есть и в графе K_x. Во втором случае добавим к этому полному подграфу K_{m-1} вершину v и получим полный подграф K_m с ребрами цвета 1 в графе K_x. □

Следствие 5.1.1. *При $m, n \geq 1$ справедливо неравенство $R(m,n) \leq C_{m+n-1}^{m-1}$.*

Доказательство. Докажем индукцией по m. *Базис индукции* $m = 1$ верен. *Индуктивный переход*: по теореме 5.1 получаем

$$R(m-1,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1) \leq C_{m+n-2}^{m-2} + C_{m+n-2}^{m-1} = C_{m+n-1}^{m-1}.$$

□

Теорема 5.2 (Эрдеша). *При $k \geq 2$ справедливо неравенство $R(k,k) \geq 2^{k/2}$.*

Доказательство. Рассмотрим $k \geq 3$, т.к. $R(2,2) = 2$. Оценим долю $\gamma(p,k)$ графов с p помеченными вершинами, в которых найдется полный подграф с k вершинами. Возможных ребер в графах с p вершинами ровно C_p^2, откуда графов с p вершинами в точности $2^{C_p^2}$. Выбрать k вершин, образующих полный подграф, из p вершин можно C_p^k способами. Оставшиеся $C_p^2 - C_k^2$ ребра могут быть проведены произвольно. Поэтому число графов с p вершинами, содержащих полный подграф с k вершинами, не более $C_p^k \cdot 2^{C_p^2 - C_k^2}$. Отсюда

$$\gamma(p,k) \leq \frac{C_p^k \cdot 2^{C_p^2 - C_k^2}}{2^{C_p^2}} = \frac{p^k}{k! 2^{C_k^2}}.$$

При $p < 2^{k/2}$ получаем

$$\gamma(p,k) < \frac{2^{k^2/2}}{k! 2^{k^2/2 - k/2}} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}.$$

Разобьем все графы с p вершинами на пары $(G, \bar{G})$. Тогда в силу доказанного выше при $p < 2^{k/2}$ в этом разбиении найдется такая пара графов $(G, \bar{G})$, что ни G, ни $\bar{G}$ не содержат полный подграф с k вершинами. Отсюда $R(k,k) \geq 2^{k/2}$. □

Следствие 5.2.1. *При $m, n \geq 2$ справедливо неравенство $R(m,n) \geq 2^{\min(m,n)/2}$.*

Вопросы и замечания просьба направлять Селезневой Светлане Николаевне по электронной почте selezn@cs.msu.su