Математическая логика и теория алгоритмов

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 8.

Алгоритм унификации.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Подстановка θ называется наиболее общим унификатором (НОУ) выражений E_1 и E_2, если

1. θ — унификатор выражений E_1 и E_2, т. е. $E_1\theta = E_2\theta$;
2. для любого унификатора η выражений E_1 и E_2 существует такая подстановка ρ, для которой верно равенство

$$\eta = \theta\rho.$$

Задача унификации

состоит в том, чтобы для двух выражений E_1 и E_2 выяснить, являются ли эти выражения унифицируемыми, и, в случае их унифицируемости, вычислить наиболее общий унификатор E_1 и E_2.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Начнем с самой простого варианта задачи унификации.

Как найти НОУ выражений E_1 и E_2, если одно из этих выражений — переменная, т. е. $E_1 = x \in Var$?

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Начнем с самой простого варианта задачи унификации.

Как найти НОУ выражений E_1 и E_2, если одно из этих выражений — переменная, т. е. $E_1 = x \in Var$?

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in HOY(x,t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $HOY(x,t) = \emptyset$.

Доказательство.

1. Случай $x \notin Var_t$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in HOY(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $HOY(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

1. Случай $x \notin Var_t$.

- Проверим, что $\theta = \{x/t\}$ — унификатор термов x и t. Действительно, $x\theta = t$ и $t\theta = t$ (т. к. $x \notin Var_t$).

Алгоритм унификации

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in HOY(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $HOY(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

1. Случай $x \notin Var_t$.

- Проверим, что $\theta = \{x/t\}$ — унификатор термов x и t. Действительно, $x\theta = t$ и $t\theta = t$ (т. к. $x \notin Var_t$).
- Покажем, что для всякого унификатора η термов x и t, верно равенство $\eta = \{x/t\}\eta$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in HOУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $HOУ(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

1. Случай $x \notin Var_t$.

- Проверим, что $\theta = \{x/t\}$ — унификатор термов x и t.
  Действительно, $x\theta = t$ и $t\theta = t$ (т. к. $x \notin Var_t$).
- Покажем, что для всякого унификатора η термов x и t, верно равенство $\eta = \{x/t\}\eta$.
  Возьмем произвольную переменную y, $y \in Var$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

1. Случай $x \notin Var_t$.

- Проверим, что $\theta = \{x/t\}$ — унификатор термов x и t. Действительно, $x\theta = t$ и $t\theta = t$ (т. к. $x \notin Var_t$).
- Покажем, что для всякого унификатора η термов x и t, верно равенство $\eta = \{x/t\}\eta$.
  Возьмем произвольную переменную y, $y \in Var$.
  Если $y = x$, то $x\{x/t\}\eta = t\eta = x\eta$. (почему?)

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

1. Случай $x \notin Var_t$.

- Проверим, что $\theta = \{x/t\}$ — унификатор термов x и t. Действительно, $x\theta = t$ и $t\theta = t$ (т. к. $x \notin Var_t$).
- Покажем, что для всякого унификатора η термов x и t, верно равенство $\eta = \{x/t\}\eta$.
  Возьмем произвольную переменную y, $y \in Var$.
  Если $y = x$, то $x\{x/t\}\eta = t\eta = x\eta$. (почему?)
  А если $y \neq x$, то $y\{x/t\}\eta = y\eta$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

1. Случай $x \notin Var_t$.

- Проверим, что $\theta = \{x/t\}$ — унификатор термов x и t. Действительно, $x\theta = t$ и $t\theta = t$ (т. к. $x \notin Var_t$).
- Покажем, что для всякого унификатора η термов x и t, верно равенство $\eta = \{x/t\}\eta$.
  Возьмем произвольную переменную y, $y \in Var$.
  Если $y = x$, то $x\{x/t\}\eta = t\eta = x\eta$. (почему?)
  А если $y \neq x$, то $y\{x/t\}\eta = y\eta$.
  Таким образом, для любой переменной y верно
  $y\{x/t\}\eta = y\eta$, т. е. $\{x/t\}\eta = \eta$.

Алгоритм унификации

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

2. Случай $x \in Var_t$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

2. Случай $x \in Var_t$.
Для любой подстановки θ длина терма $x\theta$ превосходит длину терма $t(x)\theta$.
Поэтому $x\theta \neq t\theta$ для любой подстановки θ, т. е. $НОУ(x, t) = \emptyset$.

$\square$

Алгоритм унификации

Общий случай.

Пусть $E_1 = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $E_2 = P(s_1, s_2, \dots, s_n)$.

Чтобы унифицировать E_1 и E_2 нужно найти такие значения переменных, для которых будут выполняться равенства

$$t_1 = s_1,\ t_2 = s_2, \dots, t_n = s_n.$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Общий случай.

Пусть $E_1 = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $E_2 = P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Чтобы унифицировать E_1 и E_2 нужно найти такие значения переменных, для которых будут выполняться равенства

$$t_1 = s_1,\ t_2 = s_2, \ldots, t_n = s_n.$$

Поэтому для унификации атомов E_1, E_2 сформируем систему уравнений

$$\mathcal{E}(E_1, E_2) : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \ldots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

и будем решать задачу унификации для систем уравнений.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Определение

Подстановка θ называется унификатором системы уравнений $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

если для любого i, $1 \leq i \leq n$, термы $t_i\theta$ и $s_i\theta$ одинаковы.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Определение

Подстановка θ называется унификатором системы уравнений $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

если для любого i, $1 \le i \le n$, термы $t_i\theta$ и $s_i\theta$ одинаковы.

Фактически, унификатор $\theta = \{x_1/r_1, \dots, x_k/r_k\}$ — это решение системы уравнений $\mathcal{E}$ в свободной алгебре термов (эрбрановской интерпретации).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Определение

Подстановка θ называется унификатором системы уравнений $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

если для любого i, $1 \leq i \leq n$, термы $t_i\theta$ и $s_i\theta$ одинаковы.

Фактически, унификатор $\theta = \{x_1/r_1, \dots, x_k/r_k\}$ — это решение системы уравнений $\mathcal{E}$ в свободной алгебре термов (эрбрановской интерпретации).

Соответствующим образом определяется и наиболее общий унификатор системы уравнений
(определение дать самостоятельно).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c,x) = f(y,g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \mathcal{E}_1\theta : \begin{cases} f(c,g(c)) = f(c,g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \mathcal{E}_1\theta : \begin{cases} f(c, g(c)) = f(c, g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, y) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \mathcal{E}_1\theta : \begin{cases} f(c, g(c)) = f(c, g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, y) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

Почему?

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Утверждение

Пусть заданы два атома
$E_1 = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $E_2 = P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$,
и этим атомам сопоставлена система уравнений

$$\mathcal{E} : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \ldots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Утверждение

Пусть заданы два атома
$E_1 = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $E_2 = P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$,
и этим атомам сопоставлена система уравнений

$$\mathcal{E} : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \ldots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

Тогда $\textit{НОУ}(E_1, E_2) \ = \ \textit{НОУ}(\mathcal{E})$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Утверждение

Пусть заданы два атома
$E_1 = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $E_2 = P(s_1, s_2, \dots, s_n)$,
и этим атомам сопоставлена система уравнений

$$\mathcal{E} : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

Тогда $НОУ(E_1, E_2) \; = \; НОУ(\mathcal{E})$.

Доказательство.

Очевидно из определения НОУ.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Простой случай.

Определение

Система уравнений $\mathcal{E}$ называется приведенной , если

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \dots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

и при этом

- $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq Var$,

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Простой случай.

Определение

Система уравнений $\mathcal{E}$ называется приведенной , если

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \dots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

и при этом

- $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq Var$,
- все переменные $x_1, \dots, x_n$ попарно различные,

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Простой случай.

Определение

Система уравнений $\mathcal{E}$ называется приведенной , если

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \dots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

и при этом

- $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq Var$,
- все переменные $x_1, \dots, x_n$ попарно различные,
- $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \bigcup_{i=1}^{n} Var_{s_i} = \emptyset$.

Алгоритм унификации

Пример

Система уравнений $\mathcal{E}_1$ является приведенной, а $\mathcal{E}_2$ — нет.

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = f(y, g(y)) \\ z = w \\ u = g(c) \end{cases} \qquad \mathcal{E}_2 : \begin{cases} x = f(y, g(y)) \\ z = w \\ u = g(x) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Простой случай.

Лемма (о приведенной системе)

Если система уравнений $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \dots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

является приведенной, то подстановка $\{x_1/s_1, x_2/s_2, \dots, x_n/s_n\}$ является наиболее общим унификатором системы $\mathcal{E}$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Простой случай.

Лемма (о приведенной системе)

Если система уравнений $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \dots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

является приведенной, то подстановка $\{x_1/s_1, x_2/s_2, \dots, x_n/s_n\}$ является наиболее общим унификатором системы $\mathcal{E}$.

Доказательство

Самостоятельно. С использованием леммы о связке.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Общий случай.

Найти унификатор — это значит решить систему уравнений. Решать систему будем методом исключения переменных (как в «обычной» алгебре). Исключив все переменные, получим решение (приведенную систему). Важно, чтобы все системы уравнений, которые мы будем строить в процессе «исключения переменных» были равносильны исходной системе.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Общий случай.
Найти унификатор — это значит решить систему уравнений. Решать систему будем методом исключения переменных (как в «обычной» алгебре). Исключив все переменные, получим решение (приведенную систему). Важно, чтобы все системы уравнений, которые мы будем строить в процессе «исключения переменных» были равносильны исходной системе.

Определение

Системы уравнений $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ называются равносильными , если $HOY(\mathcal{E}_1) = HOY(\mathcal{E}_2)$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Описание алгоритма унификации
(Алгоритм Мартелли–Монтанари).

Это — недетерминированный алгоритм, состоящий из 6 правил, которые можно применять в любом порядке до тех пор, пока

- либо ни одно из правил применить невозможно (построена приведенная система уравнений),
- либо применяется правило, устанавливающее невозможность унификации.

Исходная система $\mathcal{E}_0$; $i = 0$;
while применимо одно из 6 правил do
    выбрать правило R, применимое к $\mathcal{E}_i$;
    $\mathcal{E}_{i++} = R(\mathcal{E}_i)$
od

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

(1) уравнение $f(t'_1, t'_2, \dots, t'_k) = f(s'_1, s'_2, \dots, s'_k)$ замещается совокупностью уравнений $t'_1 = s'_1,\ t'_2 = s'_2,\ \dots,\ t'_k = s'_k;$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

(1) уравнение $f(t'_1, t'_2, \dots, t'_k) = f(s'_1, s'_2, \dots, s'_k)$ замещается совокупностью уравнений $t'_1 = s'_1,\ t'_2 = s'_2,\ \dots,\ t'_k = s'_k$;

(2) если в системе есть уравнение $f(t'_1, \dots, t'_k) = g(s'_1, \dots, s'_m)$, где $f, g \in Func \cup Const$, $f \neq g$, то система уравнений не имеет решений: СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА ;

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

(1) уравнение $f(t'_1, t'_2, \dots, t'_k) = f(s'_1, s'_2, \dots, s'_k)$ замещается совокупностью уравнений $t'_1 = s'_1,\ t'_2 = s'_2,\ \dots,\ t'_k = s'_k$;

(2) если в системе есть уравнение $f(t'_1, \dots, t'_k) = g(s'_1, \dots, s'_m)$, где $f, g \in Func \cup Const$, $f \neq g$, то система уравнений не имеет решений: СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА ;

(3) уравнение $s = x$, где $x \in Var$, $s \notin Var$, замещается уравнением $x = s$;

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

(1) уравнение $f(t'_1, t'_2, \dots, t'_k) = f(s'_1, s'_2, \dots, s'_k)$ замещается совокупностью уравнений $t'_1 = s'_1,\ t'_2 = s'_2,\ \dots,\ t'_k = s'_k$;

(2) если в системе есть уравнение $f(t'_1, \dots, t'_k) = g(s'_1, \dots, s'_m)$, где $f, g \in Func \cup Const$, $f \neq g$, то система уравнений не имеет решений: СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА ;

(3) уравнение $s = x$, где $x \in Var$, $s \notin Var$, замещается уравнением $x = s$;

(4) уравнение $s = s$ удаляется из системы;

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

(5) если в системе есть уравнение $x = s$, причем

- $x \in Var$,
- $x \notin Var_s$, и
- переменная x **встречается в каких-либо других уравнениях системы**,

то ко всем **другим** уравнения системы применяется подстановка $\{x/s\}$;

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

(5) если в системе есть уравнение $x = s$, причем

- $x \in Var$,
- $x \notin Var_s$, и
- переменная x **встречается в каких-либо других уравнениях системы**,

то ко всем **другим** уравнения системы применяется подстановка $\{x/s\}$;

(6) если в системе есть уравнение $x = s$, причем $x \neq s$, $x \in Var_s$, то система уравненний не имеет решений: СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА .

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \qquad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y, f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y, f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ f(x,c) = f(z,z) \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

Алгоритм унификации

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \quad \xRightarrow{(1)} \quad \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \quad \xRightarrow{(5)} \quad \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ f(x,c) = f(z,z) \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(z,c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(z,c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \quad \xRightarrow{(5)} \quad \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \stackrel{(5)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases} \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases}$$ — **приведенная система**

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

Итог бурной деятельности:

$$\mathcal{E}_0 : \left\{ \begin{array}{l} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{array} \right. \stackrel{(1,3,5)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_8 : \left\{ \begin{array}{l} y = f(c,c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{array} \right.$$

$$\theta = \{x/c, y/f(c,c), z/c, u/c, v/c\} \ \in HOY(\mathcal{E}_0)$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \quad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases} \quad \xrightarrow{(1)} \quad \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \quad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \quad \stackrel{(5)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ {\color{red} v = g(x)} \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \quad \stackrel{(5)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \quad \stackrel{(5)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \stackrel{(5)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \quad \overset{(3)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \quad \xRightarrow{(3)} \quad \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases} \xRightarrow{(6)}$$ СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases} \xRightarrow{(6)}$$ **СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА.**

Система уравнений

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

не имеет решения (унификатора).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Теорема (об унификации)

Какова бы ни была система уравнений $\mathcal{E}$,

1. алгоритм унификации Мартелли-Монтанари всегда завершает работу;
2. если система уравнений $\mathcal{E}$ унифицируема , то в результате работы алгоритма унификации будет построена приведенная система уравнений, равносильная исходной системе $\mathcal{E}$;
3. если система уравнений $\mathcal{E}$ неунифицируема , то в результате работы алгоритма унификации будет выдано сообщение СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Уравнение $x = t$, где $x \in Var, x \notin Var_t$, будем называть приведенным уравнением системы $\mathcal{E}$, если переменная x не содержится ни в каких других уравнениях системы $\mathcal{E}$. Переменную x в этом случае будем называть приведенной переменной системы $\mathcal{E}$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Уравнение $x = t$, где $x \in Var, x \notin Var_t$, будем называть приведенным уравнением системы $\mathcal{E}$, если переменная x не содержится ни в каких других уравнениях системы $\mathcal{E}$. Переменную x в этом случае будем называть приведенной переменной системы $\mathcal{E}$.

Каждой системе уравнений $\mathcal{E}$ сопоставим **характеристику** $H(\mathcal{E}) = \langle h_1(\mathcal{E}), h_2(\mathcal{E}), h_3(\mathcal{E})\rangle$, — упорядоченную тройку натуральных чисел, в которой

Алгоритм унификации

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Уравнение $x = t$, где $x \in Var, x \notin Var_t$, будем называть приведенным уравнением системы $\mathcal{E}$, если переменная x не содержится ни в каких других уравнениях системы $\mathcal{E}$. Переменную x в этом случае будем называть приведенной переменной системы $\mathcal{E}$.

Каждой системе уравнений $\mathcal{E}$ сопоставим **характеристику** $H(\mathcal{E}) = \langle h_1(\mathcal{E}), h_2(\mathcal{E}), h_3(\mathcal{E})\rangle$, — упорядоченную тройку натуральных чисел, в которой

1. $h_1(\mathcal{E})$ — общее число **неприведенных** переменных, содержащихся в системе $\mathcal{E}$;

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Уравнение $x = t$, где $x \in Var, x \notin Var_t$, будем называть приведенным уравнением системы $\mathcal{E}$, если переменная x не содержится ни в каких других уравнениях системы $\mathcal{E}$.
Переменную x в этом случае будем называть приведенной переменной системы $\mathcal{E}$.

Каждой системе уравнений $\mathcal{E}$ сопоставим **характеристику** $H(\mathcal{E}) = \langle h_1(\mathcal{E}), h_2(\mathcal{E}), h_3(\mathcal{E}) \rangle$, — упорядоченную тройку натуральных чисел, в которой

1. $h_1(\mathcal{E})$ — общее число **неприведенных** переменных, содержащихся в системе $\mathcal{E}$;
2. $h_2(\mathcal{E})$ — общее число функц. символов и констант, содержащихся в **левых частях** уравнений системы $\mathcal{E}$;

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Уравнение $x = t$, где $x \in Var, x \notin Var_t$, будем называть приведенным уравнением системы $\mathcal{E}$, если переменная x не содержится ни в каких других уравнениях системы $\mathcal{E}$. Переменную x в этом случае будем называть приведенной переменной системы $\mathcal{E}$.

Каждой системе уравнений $\mathcal{E}$ сопоставим **характеристику** $H(\mathcal{E}) = \langle h_1(\mathcal{E}), h_2(\mathcal{E}), h_3(\mathcal{E})\rangle$, — упорядоченную тройку натуральных чисел, в которой

1. $h_1(\mathcal{E})$ — общее число **неприведенных** переменных, содержащихся в системе $\mathcal{E}$;
2. $h_2(\mathcal{E})$ — общее число функц. символов и констант, содержащихся в **левых частях** уравнений системы $\mathcal{E}$;
3. $h_3(\mathcal{E})$ — общее число уравнений в системе $\mathcal{E}$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

На множестве упорядоченных троек натуральных чисел введем отношение лексикографического порядка :

$$\langle M_1, M_2, M_3 \rangle \ \succ \ \langle N_1, N_2, N_3 \rangle$$
$$\Updownarrow$$
$$M_1 > N_1$$
$$\text{или } M_1 = N_1 \text{ и } M_2 > N_2$$
$$\text{или } M_1 = N_1, M_2 = N_2 \text{ и } M_3 > N_3.$$

Пример.

$$\langle 2, 11, 2 \rangle \ \succ \ \langle 2, 10, 5578 \rangle \ \succ \ \langle 1, 1001, 78 \rangle$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Вспомогательная лемма.

Не существует бесконечно убывающей последовательности

$$\langle k_1, m_1, n_1\rangle \succ \langle k_2, m_2, n_2\rangle \succ \dots \succ \langle k_i, m_i, n_i\rangle \succ \langle k_{i+1}, m_{i+1}, n_{i+1}\rangle \succ \dots$$

в лексикографически упорядоченном множестве троек натуральных чисел.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Вспомогательная лемма.

Не существует бесконечно убывающей последовательности

$$\langle k_1, m_1, n_1 \rangle \succ \langle k_2, m_2, n_2 \rangle \succ \dots \succ \langle k_i, m_i, n_i \rangle \succ \langle k_{i+1}, m_{i+1}, n_{i+1} \rangle \succ \dots$$

в лексикографически упорядоченном множестве троек натуральных чисел.

Доказательство вспомогательной леммы.

Самостоятельно.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Идея доказательства вспомогательной леммы.

Предположим, что у Вас есть 1 000 000 $ в произвольных купюрах. Сыграем в игру. Правила игры таковы.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Идея доказательства вспомогательной леммы.

Предположим, что у Вас есть 1 000 000 $ в произвольных купюрах. Сыграем в игру. Правила игры таковы.

1. Вы даете мне денежную купюру и взамен получаете право потребовать от меня любую сумму в купюрах меньшего достоинства.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Идея доказательства вспомогательной леммы.

Предположим, что у Вас есть 1 000 000 $ в произвольных купюрах. Сыграем в игру. Правила игры таковы.

1. Вы даете мне денежную купюру и взамен получаете право потребовать от меня любую сумму в купюрах меньшего достоинства.
2. Если Вы вручаете мне купюру наименьшего достоинства, то взамен не получаете ничего.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Идея доказательства вспомогательной леммы.

Предположим, что у Вас есть 1 000 000 $ в произвольных купюрах. Сыграем в игру. Правила игры таковы.

1. Вы даете мне денежную купюру и взамен получаете право потребовать от меня любую сумму в купюрах меньшего достоинства.
2. Если Вы вручаете мне купюру наименьшего достоинства, то взамен не получаете ничего.

Докажите, что игра всегда будет оканчиваться тем, что Вы остаетесь без денег.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (1)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ f(t_1, \dots, t_n) = f(s_1, \dots, s_n) \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_n = s_n \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \geq h_1(\mathcal{E}''), \; h_2(\mathcal{E}') > h_2(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (3)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ s = x \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ x = s \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \geq h_1(\mathcal{E}''), \; h_2(\mathcal{E}') > h_2(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (4)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ s = s \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{(4)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \geq h_1(\mathcal{E}''),\ h_2(\mathcal{E}') \geq h_2(\mathcal{E}''),\ h_3(\mathcal{E}') > h_3(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \text{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (5)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} t_1\{x/s_j\} = s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\} = s_n\{x/s_j\} \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') > h_1(\mathcal{E}'')$$

Алгоритм унификации

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Значит, правила (1), (3), (4), (5) не могут применяться бесконечно долго.
Значит, рано или поздно либо будет применено одно из правил (2), (6), либо будет получена система, к которой неприменимо ни одно правило. В любом случае работа алгоритма унификации завершится.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) получается система уравнений, равносильная исходной, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow \mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}'', \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) получается система уравнений, равносильная исходной, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \;\Rightarrow\; \mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}'', \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Это, очевидно, верно для правил $(1), (3), (4)$ (убедитесь сами).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) получается система уравнений, равносильная исходной, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow \mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}'', \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Это, очевидно, верно для правил (1), (3), (4) (убедитесь сами).

Покажем, что правило (5) также приводит к равносильной системе.

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} t_1\{x/s_j\} = s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\} = s_n\{x/s_j\} \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Предположим, что θ — унификатор системы уравнений $\mathcal{E}'$, т. е.

$$\begin{cases} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\theta \equiv s_n\theta \end{cases}$$

Алгоритм унификации

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Предположим, что θ — унификатор системы уравнений $\mathcal{E}'$, т. е.

$$\begin{cases} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\theta \equiv s_n\theta \end{cases}$$

Т. к. $x\theta \equiv s_j\theta$, подстановка θ является унификатором уравнения $x = s_j$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Предположим, что θ — унификатор системы уравнений $\mathcal{E}'$, т. е.

$$\begin{cases} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\theta \equiv s_n\theta \end{cases}$$

Т. к. $x\theta \equiv s_j\theta$, подстановка θ является унификатором уравнения $x = s_j$.

Поскольку $x \notin Var_{s_j}$, согласно лемме о связке подстановка $\{x/s_j\}$ является НОУ уравнения $x = s_j$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Предположим, что θ — унификатор системы уравнений $\mathcal{E}'$, т. е.

$$\begin{cases} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\theta \equiv s_n\theta \end{cases}$$

Т. к. $x\theta \equiv s_j\theta$, подстановка θ является унификатором уравнения $x = s_j$.

Поскольку $x \notin Var_{s_j}$, согласно лемме о связке подстановка $\{x/s_j\}$ является НОУ уравнения $x = s_j$.

Но тогда, как это следует из доказательства леммы о связке, верно соотношение $\theta = \{x/s_j\}\theta$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Следовательно,

$$\begin{cases} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\theta \equiv s_n\theta \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} t_1\{x/s_j\}\theta \equiv s_1\{x/s_j\}\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\}\theta \equiv s_n\{x/s_j\}\theta \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Следовательно,

$$\begin{cases} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\theta \equiv s_n\theta \end{cases} \implies \begin{cases} t_1\{x/s_j\}\theta \equiv s_1\{x/s_j\}\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\}\theta \equiv s_n\{x/s_j\}\theta \end{cases}$$

Значит, θ — унификатор системы уравнений

$$\mathcal{E}'' : \begin{cases} t_1\{x/s_j\} \equiv s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x \equiv s_j \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\} \equiv s_n\{x/s_j\} \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Следовательно,

$$\begin{cases} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\theta \equiv s_n\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t_1\{x/s_j\}\theta \equiv s_1\{x/s_j\}\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\}\theta \equiv s_n\{x/s_j\}\theta \end{cases}$$

Значит, θ — унификатор системы уравнений

$$\mathcal{E}'' : \begin{cases} t_1\{x/s_j\} \equiv s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x \equiv s_j \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\} \equiv s_n\{x/s_j\} \end{cases}$$

Аналогично доказывается, что всякий унификатор системы $\mathcal{E}''$ является унификатором системы $\mathcal{E}'$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Как мы показали, рано или поздно при работе алгоритма либо будет применено одно из правил (2), (6), либо будет получена система, к которой неприменимо ни одно правило.

Алгоритм унификации

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Как мы показали, рано или поздно при работе алгоритма либо будет применено одно из правил (2), (6), либо будет получена система, к которой неприменимо ни одно правило.

Если к системе применяется правило (2), то в системе есть уравнение $f(s_1, \ldots, s_n) = g(t_1, \ldots, t_m)$, $f \neq g$. Очевидно, для любой подстановки θ верно $f(s_1, \ldots, s_n)\theta \neq g(t_1, \ldots, t_m)\theta$. Значит, система, содержащая такое уравнение, неунифицируема.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Как мы показали, рано или поздно при работе алгоритма либо будет применено одно из правил (2), (6), либо будет получена система, к которой неприменимо ни одно правило.

Если к системе применяется правило (2), то в системе есть уравнение $f(s_1, \dots, s_n) = g(t_1, \dots, t_m)$, $f \neq g$. Очевидно, для любой подстановки θ верно $f(s_1, \dots, s_n)\theta \not\equiv g(t_1, \dots, t_m)\theta$. Значит, система, содержащая такое уравнение, неунифицируема.

Если к системе применяется правило (6), то в системе есть уравнение $x = s$, $x \in Var_s$. Согласно лемме о связке для любой подстановки θ верно $x\theta \not\equiv s\theta$. Значит, система, содержащая такое уравнение, неунифицируема.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Как мы показали, рано или поздно при работе алгоритма либо будет применено одно из правил (2), (6), либо будет получена система, к которой неприменимо ни одно правило.

Если к системе применяется правило (2), то в системе есть уравнение $f(s_1, \dots, s_n) = g(t_1, \dots, t_m)$, $f \neq g$. Очевидно, для любой подстановки θ верно $f(s_1, \dots, s_n)\theta \not\equiv g(t_1, \dots, t_m)\theta$. Значит, система, содержащая такое уравнение, неунифицируема.

Если к системе применяется правило (6), то в системе есть уравнение $x = s$, $x \in Var_s$. Согласно лемме о связке для любой подстановки θ верно $x\theta \not\equiv s\theta$. Значит, система, содержащая такое уравнение, неунифицируема.

Значит, выдача сообщения СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА означает, что система неунифицируема.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Если к системе уравнений неприменимо ни одно правило, то

- в левых частях уравнений содержатся только переменные (иначе применимы правила (1), (2) или (3));

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Если к системе уравнений неприменимо ни одно правило, то

- в левых частях уравнений содержатся только переменные (иначе применимы правила (1), (2) или (3));
- ни одна переменная из левой части больше нигде не содержится (иначе применимы правила (4), (5) или (6)).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Если к системе уравнений неприменимо ни одно правило, то

- в левых частях уравнений содержатся только переменные (иначе применимы правила (1), (2) или (3));
- ни одна переменная из левой части больше нигде не содержится (иначе применимы правила (4), (5) или (6)).

Значит, построенная система уравнений является приведенной и имеет унификатор, который вычисляется по лемме о приведенной системе . $\square$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 8.