Задача 1

Построить в базисе $Б_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ схему из функциональных элементов (СФЭ) с входами x_1, x_2, x_3, которая содержит 2 элемента $\neg$ и реализует на трёх своих выходах функции алгебры логики (ФАЛ) $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$.

Задача 2

Построить в базисе $Б_0$ СФЭ сложности 4 (под сложностью СФЭ понимается число её элементов), которая реализует ФАЛ $x_1 \oplus x_2$, и доказать, что с меньшей сложностью эту ФАЛ (под сложностью ФАЛ пониматеся минимальная из сложностей реализующих её СФЭ) в базисе $Б_0$ реализовать нельзя.

Задача 3

Пусть для $n = 1, 2, \ldots,$ ФАЛ $\mu_n(x_1, \ldots x_n, y_0, \ldots, y_{2^n-1})$ равна той из своих информационных переменных $y_0, \ldots, y_{2^n-1}$, номер которой в двоичной системе счисления задаётся значениями её адресных переменных $x_1, \ldots, x_n$, то есть

$$\mu_n(x_1, \ldots x_n, y_0, \ldots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in\{0,1\}^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot y_{\nu(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)},$$

где $x^0 = \overline{x}$, $x^1 = x$ и $\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sigma_1 \cdot 2^{n-1} + \ldots + \sigma_n$.

Для $n = 2, 3, 4, 5$ построить в базисе $Б_0$ такую реализующую ФАЛ μ_n СФЭ Σ_n любая цепь которой содержит не более $(n + 2)$ элементов $\&$, $\vee$ и не более 1 элемента $\neg$.

Задача 4

Определим BDD Σ от булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$ как ориентированный граф без ориентированных циклов с 1 истоком и 2 стоками, в котором первый (второй) сток имеет пометку 0 (соответственно 1), каждая отличная от них вершина — пометку x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, а две исходящих из неё дуги — пометки 0 и 1. Указанная BDD Σ реализует ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ такую, что $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — пометка того стока Σ, в которой придёт цепь, начинающаяся в истоке Σ и покидающая любую свою вершину с пометкой x_j по дуге с пометкой σ_j.

Доказать, что при $n \geqslant 2$ сложность реализации ФАЛ $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ в классе BDD равна $2n - 1$, если под сложностью BDD понимать число её вершин, отличных от стоков.

Задача 5

Доказать, что для любого натурального n в графе единичного куба размерности $(n + 1)$ есть подграф, гомеоморфный полному двоичному n-ярусному дереву, то есть получающийся из него подразбиением рёбер.

Задача 6

Доказать, что для любого натурального n в целочисленной прямоугольной решётки с h горизонтальными линиями при $h \geqslant \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ имеется, а при $h < \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ отсутствует подграф, гомеоморфный полному двоичному n-ярусному дереву, листья которого располагаются на нижней границе данной решётки.