

Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Осенний семестр 2017–2018 уч. г.
группы 311–319

лектор — профессор С. А. Ложкин
(lozhkin@cs.msu.su)

Информационная поддержка курса:

[http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_\(2-й_поток,_3_курс\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(2-й_поток,_3_курс))

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

8 Формулы алгебры логики, их эквивалентные преобразования с помощью тождеств. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$

$$\begin{aligned}
\tau^{\text{och}} &= \{ t_{\&}^M, t_{\neg}^M, t_{\&}^A, t_{\&}^K, t_{\&}^{\text{O}\Pi}, t_{\&,\vee}^D, t_{1,\&}^{\Pi K}, t_{0,\&}^{\Pi K} \}, \\
\tau^A &= \{ t_{\&}^A, t_{\vee}^A \}, \\
\tau^K &= \{ t_{\&}^K, t_{\vee}^K \}, \\
\tau^{\text{O}\Pi} &= \{ t_{\&}^{\text{O}\Pi}, t_{\vee}^{\text{O}\Pi} \}, \\
\tau^D &= \{ t_{\&,\vee}^D, t_{\vee,\&}^D \}, \\
\tau^{\Pi K} &= \{ t_{0,\&}^{\Pi K}, t_{1,\&}^{\Pi K}, t_{0,\vee}^{\Pi K}, t_{1,\vee}^{\Pi K} \}, \\
\tilde{\tau}^{\text{och}} &= \{ \tau^M, \tau^A, \tau^K, \tau^{\text{O}\Pi}, \tau^D, \tau^{\Pi K}, t^{\Pi} \}.
\end{aligned}$$

Утверждение 8.1 Система $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ выводима из системы $\tau^{\text{осн}}$.

Утверждение 8.2 Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$, реализующую ФАЛ f , с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.

Утверждение 8.3 Система $\tau^{\text{осн}}$ — полная система тождеств.

9. Задание формул с
помощью деревьев,
функционалы их сложности и
соотношения между ними.
Оптимизация подобных
формул по глубине

Утверждение 9.1 Для формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$, вида $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \circ \dots \circ \mathcal{F}_k$, где $\circ \in \{\&, \vee\}$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} R(\mathcal{F}) &= L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1 \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq \\ &\leq 2^{D(\mathcal{F}_1)} + \dots + 2^{D(\mathcal{F}_k)} \leq 2^{D(\mathcal{F})}, \end{aligned}$$

где $L_{\&, \vee}(\mathcal{F})$ – число ΦC $\&$ и \vee в формуле \mathcal{F} .

Следствие

$$\begin{aligned} D(\mathcal{F}) &\geq \lceil \log(2^{D(\mathcal{F}_1)} + \dots + 2^{D(\mathcal{F}_k)}) \rceil \geq \\ &\geq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil. \end{aligned}$$

Утверждение 9.2 Для любой формулы \mathcal{F} с поднятыми отрицаниями из \mathcal{U}^Φ существует подобная ей формула $\check{\mathcal{F}}$ такая, что

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \text{Alt}(\mathcal{F}).$$

Следствие 1. Для любой ЭК или ЭД K существует подобная ей формула \check{K} такая, что

$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil,$$

которая, минимальна по глубине.

Следствие 2. Для любой ДНФ или КНФ \mathfrak{A} существует подобная ей формула $\check{\mathfrak{A}}$ такая, что

$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leq \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

10. Схемы из функциональных элементов.

Изоморфизм и
эквивалентность схем,
функционалы их сложности,
операции приведения.

Верхние оценки числа
формул и схем в базисе

$$\{\&, \vee, \neg\}$$

Утверждение 10.1 Для приведенной СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^C$, с одним выходом, выполняются неравенства

$$R(\Sigma) \leq L_{\&, \vee}(\Sigma) + 1 \leq L(\Sigma) + 1 \leq 2^{D(\Sigma)},$$

где $L_{\&, \vee}$ — число ФЭ $\&$ и \vee в Σ .

Утверждение 10.2 Для любых
натуральных n, L, D выполняются
неравенства

$$|\mathcal{U}^\Phi(L, n)| \leq (10n)^{L+1},$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq (8n)^{L+1},$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi[D, n]\| \leq (8n)^{2^D}.$$

Следствие Число попарно не коммутативно подобных формул с поднятыми отрицаниями ранга R от БП x_1, \dots, x_n не больше, чем $(12n)^R$.

Утверждение 10.3 Для любых натуральных n и L выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L + n))^{L+1}.$$

11. Контактные схемы (КС) и
 π -схемы, их изоморфизм,
эквивалентность, сложность,
операции приведения.

Структурное моделирование
формул и π -схем. Оценки
числа КС и числа π -схем.

Особенности
функционирования
многополюсных схем

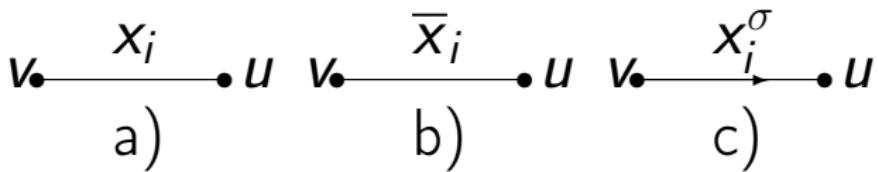


Рис. 1: типы контактов

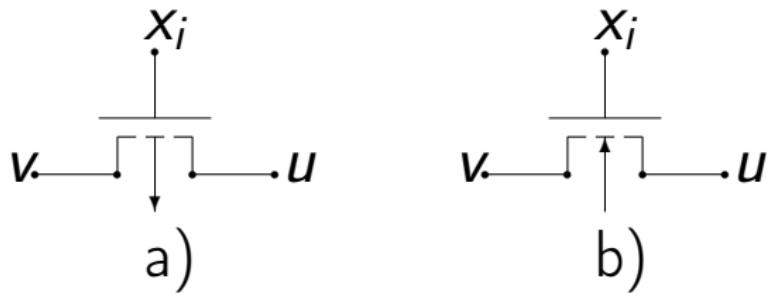
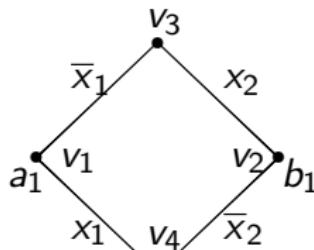
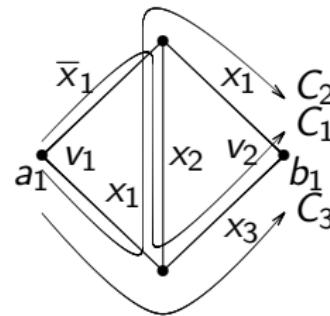


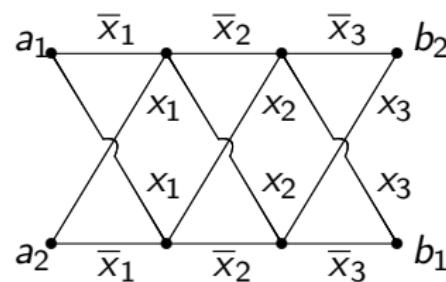
Рис. 2: физическая интерпретация контактов



a)



b



c)

Рис. 3: некоторые КС от БП x_1, x_2, x_3

Утверждение 11.1 Любой π -схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу \mathcal{F} из \mathcal{U}^Φ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.

Утверждение 11.2 При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (12n)^L.$$

Утверждение 11.3 При любых
натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L.$$

12. Эквивалентные преобразования схем из функциональных элементов и моделирование с их помощью формульных преобразований.

Моделирование
эквивалентных
преобразований формул и
схем в различных базисах,
теорема перехода

Утверждение 12.1 Если τ — конечная полная система тождеств для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ , то $\{\underline{\tau}, \tau^C, \tau^B\}$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из \mathcal{U}_B^C

Следствие Система тождеств $\{\underline{\tau}^{\text{осн}}, \tau^B, \tau^C\}$ — КПСТ для ЭП СФЭ из \mathcal{U}^C .

Утверждение 12.2 Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ , а Π' и Π — системы тождеств для перехода от базиса B к базису B' и от базиса B' к базису B соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ .

Следствие Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из \mathcal{U}^Φ указанным в утверждении способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе B .

13. Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщённых тождеств

Утверждение 13.1 Имеет место выводимость $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \not\Rightarrow \{t_7 - t_{11}\}$.

Утверждение 13.2 При $n \geq 2$ имеет место выводимость $\tau_n \not\Rightarrow \tau^{(n)}$.

14. Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Утверждение 14.1 Для любой КС Σ , где $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{U}^K$, и любой эквивалентной Σ КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \Rightarrow \widehat{\Sigma}$.

τ_n

Утверждение 14.2 Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП x_1, \dots, x_n существует ЭП вида $\Sigma' \rightrightarrows \Sigma''$.

τ_n

Следствие Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из \mathcal{U}^K от БП x_1, \dots, x_n .

Следствие Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из \mathcal{U}^K .

Утверждение 14.3 Если

$\Sigma' (x_1, \dots, x_n) \stackrel{\{t_1 - t_5\}}{\Rightarrow} \Sigma'' (x_1, \dots, x_n)$, то

$\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, а если $\Sigma' \stackrel{\tau_k}{\Rightarrow} \Sigma''$, где $k < n$,

то $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ делится на 2^{n-k} .

Утверждение 14.4 В классе \mathcal{U}^K не существует конечной полной системы тождеств.